Sobre a estimação de limiares em processos contínuos com regimes

Pedro P. Mota

Departamento de Matemática e CMA da FCT/UNL

Manuel L. Esquível

Departamento de Matemática FCT/UNL e CMAF/FC/UL

Resumo: Consideramos processos estocásticos definidos por equações diferenciais estocásticas em que o coeficiente de tendência (*drift*) sofre uma mudança de um regime com tendência positiva para um regime com tendência negativa quando a trajectória atinge um limiar superior M e sofre uma mudança de um regime com tendência negativa para um regime com tendência positiva quando a trajectória atinge um limiar inferior m.

Em estudos anteriores [5], implementámos um procedimento para estimar os limiares M e m quando a equação diferencial estocástica em questão é a dada pelo processo browniano com tendência e demonstrámos a consistência dos estimadores quando o processo é observado em contínuo. Neste trabalho, em que tratamos o caso da observação em tempo discreto do processo e quando o intervalo de discretização tende para zero, propomos um procedimento de estimação, apresentamos um estudo de simulação com três exemplos (Browniano com tendência, Browniano geométrico e processo de Ornstein-Uhlenbeck) e demonstramos a consistência dos estimadores.

Palavras–chave: processo com alternância de regimes, limiar, estimador dos mínimos quadrados

Abstract: We consider stochastic processes defined by stochastic differential equations in which the drift switches from a positive value to a negative value as the trajectory hits an upper threshold M and switches from a negative value to a positive value as the trajectory hits a lower threshold m.

In previous studies [5] we implemented a threshold estimating procedure for M and m when the stochastic differential equation under scrutiny was the one defining the Brownian process with drift and we proved the consistency of the estimators when the trajectories were continuously observed. In this work, dealing with the discretely observed trajectories when the length of the interval between observations goes to zero, we propose an estimation procedure, we present a simulation study with three examples (Brownian with drift, geometric Brownian motion, and Ornstein-Uhlenbeck process) and we prove the estimators consistency.

Keywords: regime switching process, threshold, least squares estimator.

1 Introdução

O modelo auto-regressivo com limiares (threshold-TAR) está bem documentado e estudado no caso de séries temporais, veja-se, por exemplo, [8], [6], [2] ou [3]. Questões do mesmo tipo foram abordadas em [4] usando observações do processo num intervalo de tempo fixo e recorrendo ao estimador da máxima verosimilhança para o limiar.

Neste trabalho centramos o nosso estudo em processos cujos regimes (regime com tendência positiva e regime com tendência negativa) são definidos a partir dos limiares, isto é, partindo de um processo com tendência positiva, haverá uma mudança de regime que se traduz por uma alteração da tendência do processo (para um valor negativo) quando o processo atinge um limiar superior que iremos designar por M. Quando o processo se encontra no regime cuja tendência é negativa a mudança de regime ocorrerá quando o processo atinge um limiar inferior designado por m, passando o processo de novo ao regime de tendência positiva.

O nosso principal objectivo é o de introduzir um procedimento de estimação dos limiares, m e M, considerando conhecidos os outros parâmetros do modelo, demonstrando a consistência dos estimadores daí resultantes quando o processo é observado em tempo discreto e o intervalo de discretização tende para zero. De referir que em [5] o mesmo problema já foi abordado com sucesso mas apenas para o processo browniano com tendência e quando o processo é observado em contínuo.

O modelo em análise pode ser representado pela equação diferencial estocástica,

$$dXt = a(\mu(t), X_t)dt + b(\sigma, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0 \in [m, M], \tag{1}$$

onde

$$\mu(t) = \sum_{k\geq 0} \left[\mu_1 \mathbb{I}_{[\tau_{2k},\tau_{2k+1}[}(t) + \mu_2 \mathbb{I}_{[\tau_{2k+1},\tau_{2k+2}[}(t)\right], \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

em que $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_j < \ldots$ são os instantes (aleatórios) em que as trajectórias atingem os limiares.

Supomos que o processo pode ser observado nos instantes da forma $j\Delta_n$, $j = 0, ..., N$ onde Δ_n é o intervalo de discretização, ou seja, a distância temporal entre duas observações consecutivas. Para efeitos de estudo assimptótico iremos supor que Δ_n decresce para zero e que o número de observações $N = N(n)$ verificará a relação $N = 1/\Delta_n^2$, isto significa que, para cada n, observaremos o processo no intervalo $[0, \sqrt{N}]$. No que se segue escreveremos $f(t-s) = O(|t-s|)$ para representar que $\lim_{|t-s|\to 0} \frac{|f(t-s)|}{|t-s|} = C$, com $0 < C < \infty$ (e $\lim_{|t-s|\to 0} f(|t-s|) = 0$) e consideraremos para cada N e $s = 0, ..., N$, a álgebra-σ,

$$\mathcal{F}_s^N = \sigma\left(\{X_0, X_{\Delta_n}, ..., X_{s\Delta_n}\} \cup \{\tau_1, ..., \tau_{K_n}\}\right).$$

2 Procedimento de Estimação

A ideia base na determinação dos estimadores dos limiares passa por implementar um procedimento de minimização da soma dos quadrados dos erros, isto é, para cada N e Δ_n o procedimento será implementado da seguinte forma.

1. Para limiares fixos m e M, classificaremos as observações em regimes, $\widehat{R}_1(m,M)$ e $\widehat{R}_2(m,M)$ correspondentes aos regimes, do processo inicial, com tendência positiva e com tendência negativa, respectivamente. De seguida, e com base nesta classificação, calcularemos a soma do quadrado dos erros (condicionais),

$$LSE_N(m,M) =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} \Big\{ \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]\big)^2 \mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)}((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n}))$$
$$+ \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]\big)^2 \mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)}((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n}))\Big\}, \tag{2}$$

onde $\mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]$ representa o valor esperado de $X_{(j+1)\Delta_n}$ dado $X_{j\Delta_n}$ quando a tendência do processo é função de μ_p, ou seja, quando $a(\mu,x) = a(\mu_p,x)$, temos também que $\mathbb{I}_{(\widehat{R}_p\times\widehat{R}_p)}((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n}))$ significa que $X_{j\Delta_n}$ e $X_{(j+1)\Delta_n})$ estão ambos classificados no regime p com $p = 1, 2$.

2. Escolheremos para estimadores dos limiares, os valores de $(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N)$ que minimizam $LSE_N(m,M)$, ou seja,

$$(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N) = \text{argmin}_{(m,M)} LSE_N(m,M). \tag{3}$$

Observação 2.1 *A classificação em regimes é feita da seguinte forma: fixando (m,M), as observações vão sendo classificadas no regime 1 até encontrarmos a primeira observação que é maior ou igual a M, sendo essa observação classificada no regime 1 e simultaneamente no regime 2, todas as observações daí em diante serão classificadas no regime 2 até encontrarmos uma observação que seja menor ou igual a m sendo essa observação classificada, ainda, no regime 2 mas simultaneamente no regime 1, o processo de classificação continua até todas as observações estarem classificadas.*

3 Exemplos de Aplicação com simulação

Nesta secção descrevemos os resultados da implementação do método de estimação proposto através de simulação. A implementação foi realizada num computador Pentium IV a 2.4Ghz. A demonstração da consistência do estimador será efectuada na secção 4. Para cada um dos exemplos seguintes foi previamente verificada a convergência do estimador.

3.1 Um processo do tipo Browniano com *drift*

O processo que consideramos a seguir obtem-se a partir do processo Browniano adicionando-lhe uma tendência que pode tomar dois valores distintos simétricos.

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{4}$$

onde

$$\mu(t) = \sum_{k\geq 0} \left[\mu_1 \mathbb{I}_{[\tau_{2k},\tau_{2k+1}[}(t) + \mu_2 \mathbb{I}_{[\tau_{2k+1},\tau_{2k+2}[}(t)\right], \quad \mu_1 > 0, \mu_2 < 0.$$

Por uma questão de simplicidade assumimos que mudança de regime traduz-se por uma mudança no sinal do parâmetro de drift, isto é, vamos considerar $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $m = -2$ e $M = 2$, e $\sigma = .9$.

Para este modelo as condições de (4.1) a (4.4) são trivialmente verificadas excepto a condição (4.2) o que não inviabiliza os resultados obtidos pois é fácil demonstrar o lema (5.1) de forma alternativa e pelo facto de $f_1(X) \equiv 1, g_1(X) \equiv 1$ também se pode usar este facto para simplificar a demonstração do resultado sobre a consistência dos estimadores dos limiares sem usar a condição (4.2).

Os resultados obtidos pela simulação são baseados nos seguintes pressupostos, o passo de discretização é dado por $\Delta_n = 1/2^n$ com $n = 4, ..., 9$. Calculou-se a soma LSE para valores de $(m, M) \in [-2.8, 1.5] \times [1.5, 2.8]$ colocados numa grelha com passo .05 tendo-se depois refinado a busca para $(m, M) \in [-2.05, 1.9] \times [1.9, 2.05]$ com passo .01.

Obtiveram-se os resultados explicitados na tabela seguinte

Tabela 1: Estimativas dos limiares $(-2, 2)$ para o Browniano com *drift*.

	$\widehat{m}_N$	$\widehat{M}_N$
$n = 4$	-2.03	2.02
$n = 5$	-1.98	1.9
$n = 6$	-1.96	1.97
$n = 7$	-1.96	1.99
$n = 8$	-1.96	1.99
$n = 9$	-1.99	2.0

Pode-se concluir que mesmo com um número muito reduzido de observações as estimativas devolvem valores dos limiares com boa aproximação.

3.2 Um processo do tipo Browniano geométrico

$$dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{5}$$

onde

$$\mu(t) = \sum_{k\geq 0} \left[\mu_1 \mathbb{I}_{[\tau_{2k},\tau_{2k+1}[}(t) + \mu_2 \mathbb{I}_{[\tau_{2k+1},\tau_{2k+2}[}(t)\right], \quad \mu_1 > 0, \mu_2 < 0.$$

Observação 3.1 *Uma vez mais a única dúvida prende-se com a verificação da condição (4.2) que terá de ser verificada com* $r = 4$ *porque* $f_1(X) = X, g_1(X) = X^2$. *No regime* 1 *o processo verifica* $0 \leq X_t \leq M$, *pela definição do processo com limiares temos sempre que* $X_t \leq M$ *e a outra desigualdade verifica-se por estarmos perante um processo não negativo. No regime* 2 *e tendo em atenção que os* 4*'s momentos são conhecidos conclui-se que os mesmos são finitos desde que* $\mu_2 < -\frac{3}{2}\sigma^2$.

Considerou-se, $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$ e $\sigma = .6$, para os limiares $m = 5$ e $M = 15$. Calculou-se LSE para valores de $(m, M) \in [4, 6] \times [14, 16]$ numa grelha com passo .1 e obteve-se,

Tabela 2: Estimativas dos limiares $(5, 15)$ para o Browniano geométrico.

	$\widehat{m}_N$	$\widehat{M}_N$
$n = 4$	4.5	14
$n = 5$	5.5	14.3
$n = 6$	5.3	14.7
$n = 7$	5.2	14.8
$n = 8$	5.3	14.7
$n = 9$	5.1	15

Neste caso as estimativas obtidas só têm uma boa aproximação quando o número de observações é o máximo considerado no estudo (da ordem de 2^9.

3.3 Um processo do tipo Ornstein-Uhlenbeck

Este processo pode obter-se a partir do processo de Ornstein-Uhlenbeck considerando um coeficiente de tendência a tomar dois valores distintos.

$$dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{6}$$

onde

$$\mu(t) = \sum_{k\geq 0} \left[\mu_1 \mathbb{I}_{[\tau_{2k},\tau_{2k+1}[}(t) + \mu_2 \mathbb{I}_{[\tau_{2k+1},\tau_{2k+2}[}(t)\right], \quad \mu_1 > 0, \mu_2 < 0$$

Observação 3.2 *A condição (4.2) terá de ser verificada com* $r = 2$ *porque* $f_1(X) = X, g_1(X) \equiv 1$ *pelo que se podem fazer algumas simplificações na demostração. Uma vez mais, no regime* 1 *o processo verifica* $0 \leq X_t \leq M$, *pelo* *que já foi dito anteriormente teremos* $X_t \leq M$ *a outra desigualdade terá de ser imposta porque se* $X_t < 0$ *para algum* t *no regime* 1 *pode acontecer que* $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ *e perde-se o efeito de processo com limiares (no regime* 1 *com* $X_0 > 0$ *o processo* X_t *é submartingala mas se* $X_0 < 0$ *o processo é supermartingala). No regime* 2 *é trivial verificar que* $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[X_t] < \infty$.

Considerou-se, $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$ e $\sigma = 1$, e para os limiares $m = 1$ e $M = 4$. Calculou-se a soma LSE para valores de $(m, M) \in [.8, 1.2] \times [3.4, 4.2]$ numa grelha com espaçamento .05 e obteve-se,

Tabela 3: Estimativas dos limiares $(1, 4)$ para Ornstein-Uhlenbeck.

	$\widehat{m}_N$	$\widehat{M}_N$
$n = 4$	1.05	3.8
$n = 5$	1.05	3.85
$n = 6$	1.0	3.85
$n = 7$	1.05	3.9
$n = 8$	1.05	3.95
$n = 9$	1.0	4.0

As estimativas obtidas para os limiares são aceitáveis com um número de observações intermédio, relativamente aos exemplos anteriores.

4 Sobre a consistência do estimador

Os processos aos quais se aplica o resultado principal desta secção deverão satisfazer um conjunto de condições que explicitamos a seguir.

Condição 4.1 X_t *verifica as condições usuais para a existência e unicidade de solução para a equação diferencial estocástica que o define (EDE) (1) em ambos os regimes,* $|a(\mu, x)| + |b(\sigma, x)| \leq C(1 + |x|)$, *para* $\mu \in \{\mu_1, \mu_2\}$.

Condição 4.2 $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^r] < \infty$ *para* r *definido de forma mais adequada para cada caso (nos casos em estudo* $r = 4$*).*

As condições técnicas seguintes são suficientes para não complicar demasiadamente a demonstração e ao mesmo tempo definem uma classe de processos suficientemente ampla para comportar os exemplos tratados anteriormente.

Repare-se que podemos escrever, para $s < t$,

$$\mathbb{E}_\mu[X_t|X_s] = X_s + \int_s^t \mathbb{E}[a(\mu, X_u)|X_s]du = X_s + f(X_s, t - s, \mu) \qquad (7)$$

pelo que poderemos introduzir as seguintes condições:

Condição 4.3 *$\mathbb{E}_\mu[X_t|X_s] = X_s + f_1(X_s)f_2(t-s,\mu)$ com $f_1(X_s) \leq C_1(1+|X_s|^p)$ e $f_2(t-s,\mu) = O(t-s), \forall \mu = \mu_1, \mu_2$.*

Condição 4.4 *$\mathbb{V}_\mu[X_t|X_s] = g_1(X_s)g_2(t-s,\mu)$ com $g_1(X_s) \leq C_2(1+|X_s|^q)$ e $g_2(t-s,\mu) = O(t-s), \forall \mu$.*

Podemos agora enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.5 *Sob as condições de (4.1) a (4.4), o estimador*

$$\forall N \in \mathbb{N},\ (\widehat{m}_N, \widehat{M}_N) = argmin_{(m,M)} LSE_N(m,M),$$

com LSE_N como em (2), é consistente.

Demonstração. A ideia principal da demonstração é mostrar que se a sucessão $\left((\widehat{m}_N, \widehat{M}_N)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ não converge para (m_0, M_0) então não poderemos estar perante uma sucessão $\left((\widehat{m}_N, \widehat{M}_N)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ de valores que minimiza a soma dos quadrados dos erros.

Suponha-se que a sequência $\left((\widehat{m}_N, \widehat{M}_N)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ não é consistente, poderemos então escrever que existe $\delta > 0$ e existe $\varepsilon(\delta) > 0$ tais que:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists N \geq p \wedge \mathbb{P}[\|(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N) - (m_0, M_0)\| > \delta] > \varepsilon. \tag{8}$$

Consideremos primeiro o caso em que

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}[\widehat{m}_N > m_0 + \delta_m \wedge \widehat{M}_N < M_0 - \delta_M] > \varepsilon. \tag{9}$$

Então existe uma sub-sequência $(\widehat{m}_{N_i}, \widehat{M}_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}[\widehat{m}_{N_i} > m_0 + \delta_m \wedge \widehat{M}_{N_i} < M_0 - \delta_M] > \varepsilon \tag{10}$$

por simplicidade assumamos que isto se verifica para a sequência original.

Podemos decompor a expressão LSE introduzindo a correcta classificação em regimes,

$$
\begin{aligned}
& LSE_N(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N) = \\
& = \sum_{j=0}^{N-1} \Big\{ \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n} | X_{j\Delta_n}]\big)^2 \times \\
& \qquad \times \left[\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1 \times \widehat{R}_1) \cap [(R_1 \times R_1) \cup (R_2 \times R_2)]} \right] ((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n})) \\
& + \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n} | X_{j\Delta_n}]\big)^2 \times \\
& \qquad \times \left[\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2 \times \widehat{R}_2) \cap [(R_1 \times R_1) \cup (R_2 \times R_2)]} \right] ((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n})) \Big\} \\
& + \sum_{j=0}^{N-1} \Big\{ \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n} | X_{j\Delta_n}]\big)^2 \times \\
& \qquad \times \left[\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1 \times \widehat{R}_1) \cap [(R_1 \times R_2) \cup (R_2 \times R_1)]} \right] ((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n})) \\
& + \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n} | X_{j\Delta_n}]\big)^2 \times \\
& \qquad \times \left[\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2 \times \widehat{R}_2) \cap [(R_1 \times R_2) \cup (R_2 \times R_1)]} \right] ((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n})) \Big\} .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Somando e subtraindo as esperanças condicionais sob as verdadeiras classificações em regimes, obteremos,

$$
\begin{aligned}
& LSE_N(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N) = \\
& = \sum_{j=0}^{N-1} \Big\{ \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n} | X_{j\Delta_n}]\big)^2 \, \mathbb{I}_{(R_1 \times R_1)}((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n})) \\
& + \big(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n} | X_{j\Delta_n}]\big)^2 \, \mathbb{I}_{(R_2 \times R_2)}((X_{j\Delta_n}, X_{(j+1)\Delta_n})) \Big\} \\
& + \sum_{j=1}^{k_N} \Big\{ \big(X_{(n_j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n} | X_{\tau_j}]\big)^2 \, \mathbb{I}_{(R_1 \times R_2)}((X_{n_j\Delta_n}, X_{(n_j+1)\Delta_n})) \\
& + \big(X_{(n_j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n} | X_{\tau_j}]\big)^2 \, \mathbb{I}_{(R_2 \times R_1)}((X_{n_j\Delta_n}, X_{(n_j+1)\Delta_n})) \Big\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

mais os termos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} \big\{ 2(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])(\mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]- \\
&- \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)\cap(R_1\times R_1)} \\
&+2(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])(\mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]- \\
&- \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)\cap(R_2\times R_2)}\Big\} \\
&+ \sum_{j=1}^{k_N} \big\{ 2(X_{(n_j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}])\times \\
&\times \Big[(\mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)} \\
&+((\mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)}\Big]\, \mathbb{I}_{(R_1\times R_2)} \\
&+ 2(X_{(n_j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}])\times \\
&\times \Big[(\mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)} \\
&+((\mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)}\Big]\, \mathbb{I}_{(R_2\times R_1)}\Big\}
\end{aligned} \tag{13}
$$

e os quadrados,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} \Big\{ (\mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])^2\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)\cap(R_1\times R_1)} \\
&+(\mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])^2\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)\cap(R_2\times R_2)}\Big\} \\
&+ \sum_{j=1}^{k_N} \Big\{ \Big[(\mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])^2\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)} \\
&+((\mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])^2\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)}\Big]\, \mathbb{I}_{(R_1\times R_2)} \\
&+ \Big[(\mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])^2\mathbb{I}_{(\widehat{R}_1\times\widehat{R}_1)} \\
&+((\mathbb{E}_{\mu_1}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_2}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}])^2\mathbb{I}_{(\widehat{R}_2\times\widehat{R}_2)}\Big]\, \mathbb{I}_{(R_2\times R_1)}\Big\},
\end{aligned} \tag{14}
$$

onde k_N é o número de instantes de contacto (ou de mudanças de regime) no intervalo $[0,\sqrt{N}]$, os n_j's são tais que $n_j\Delta_n \leq \tau_j < (n_j+1)\Delta_n$ e

$$\mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] = \mathbb{E}_{\mu_p,\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n},\tau_j]$$

é o valor esperado de $X_{(n_j+1)\Delta_n}$ dado $X_{n_j\Delta_n}$ e o facto que ocorreu uma mudança do regime p para o regime q no instante $\tau_j \in [n_j\Delta_n,(n_j+1)\Delta_n[$, com $p,q = 1,2,\ p\neq q$.

Afirmação 4.6 *A soma em (13) tende para zero quando $N \to \infty$ ou $\Delta_n \to 0$.*

Demonstração. Em (13) temos as seguintes somas,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} 2(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])\times \\
&\times \left(\mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]\right) \mathbb{I}_{(R_p\times R_p)\cap(\widehat{R}_q\times\widehat{R}_q)}, \\
&\sum_{j=1}^{k_N} 2(X_{(n_j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}])\times, \\
&\times \left(\mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}] - \mathbb{E}_{\mu_r}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}]\right) \mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)},
\end{aligned} \tag{15}$$

com $p, q, r = 1, 2,\ p \neq q$.

Iremos mostrar que estas somas convergem para zero.

Começando com $Y_{j\Delta_n} = X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]$, pela condição (4.3) podemos escrever

$$\mathbb{E}_{\mu}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] = X_{j\Delta_n} + f_1(X_{j\Delta_n})f_2(\Delta_n, \mu),$$

pelo que a primeira soma,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{N-1} \left[Y_{j\Delta_n} \left(\mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]\right) \mathbb{I}_{(R_p\times R_p)\cap(\widehat{R}_q\times\widehat{R}_q)}\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left[Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n}) \left(f_2(\Delta_n, \mu_p) - f_2(\Delta_n, \mu_q)\right) \mathbb{I}_{(R_p\times R_p)\cap(\widehat{R}_q\times\widehat{R}_q)}\right] = \\
&= \left(f_2(\Delta_n, \mu_p) - f_2(\Delta_n, \mu_q)\right) \sum_{j=0}^{N-1} \left[Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n}) \mathbb{I}_{(R_p\times R_p)\cap(\widehat{R}_q\times\widehat{R}_q)}\right].
\end{aligned} \tag{16}$$

Repare-se que para $i < j$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Y_{i\Delta_n} f_1(X_{i\Delta_n}) Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{i\Delta_n} f_1(X_{i\Delta_n}) Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n})|\mathcal{F}_j^N]] = \\
&= \mathbb{E}[Y_{i\Delta_n} f_1(X_{i\Delta_n}) f_1(X_{j\Delta_n}) \mathbb{E}[Y_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N]] = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

uma vez que $\mathbb{E}[Y_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N] = 0$.

Teremos então, usando o facto de $(f_2(\Delta_n, \mu_p) - f_2(\Delta_n, \mu_q)) = O(\Delta_n), \forall \mu =$

μ_1, μ_2 e Chebyshev, que,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left|O(\Delta_n)\sum_{j=0}^{N-1} Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n})\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{O(\Delta_n^2)}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{N-1} Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n})\right)^2\right] \\
&= \frac{O(\Delta_n^2)}{\varepsilon^2}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{N-1}(Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n}))^2\right] + \right. \\
&+ \left.\mathbb{E}\left[\sum_{i\neq j, i,j=0}^{N-1}(Y_{i\Delta_n} f_1(X_{i\Delta_n}))(Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n}))\right]\right) = \\
&= \frac{O(\Delta_n^2)}{\varepsilon^2}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[(Y_{j\Delta_n} f_1(X_{j\Delta_n}))^2\right]
\end{aligned}
\tag{18}
$$

mas também temos,

$$
\mathbb{E}[Y^2_{j\Delta_n} f_1^2(X_{j\Delta_n})] = \mathbb{E}[f_1^2(X_{j\Delta_n})\mathbb{E}[Y^2_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N]] = \mathbb{E}[f_1^2(X_{j\Delta_n})\mathbb{V}[Y_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N]], \tag{19}
$$

com $\mathbb{V}[Y_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N]$ a variância condicional.

Uma vez mais usando a condição (4.3), virá

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{V}[Y_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N] = \mathbb{E}\left[\left(X_{(j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]\right)^2|\mathcal{F}_j^N\right] \leq \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(X_{(j+1)\Delta_n} - X_{j\Delta_n}\right)^2|\mathcal{F}_j^N\right] + 2\mathbb{E}\left[f_1^2(X_{j\Delta_n})f_2^2(\Delta_n,\mu)|\mathcal{F}_j^N\right],
\end{aligned}
\tag{20}
$$

repare-se ainda que usando as condições (4.3) e (4.4) em conjunto com o facto de $\mathbb{E}\left[X^2_{(j+1)\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N\right] = \mathbb{V}\left[X_{(j+1)\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N\right] + \mathbb{E}\left[X_{(j+1)\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N\right]^2$, se tem que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(X_{(j+1)\Delta_n} - X_{j\Delta_n}\right)^2|\mathcal{F}_j^N\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[X^2_{(j+1)\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N\right] - 2X_{j\Delta_n}\mathbb{E}\left[X_{(j+1)\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N\right] + X^2_{j\Delta_n} = \\
&= \mathbb{E}\left[X^2_{(j+1)\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N\right] - 2X^2_{j\Delta_n} - 2X_{j\Delta_n}f_1(X_{j\Delta_n})f_2(\Delta_n,\mu) + X^2_{j\Delta_n} = \\
&= g_1(X_{j\Delta_n})g_2(\Delta_n,\mu) + X^2_{j\Delta_n} + 2X_{j\Delta_n}f_1(X_{j\Delta_n})f_2(\Delta_n,\mu) + \\
&+ f_1^2(X_{j\Delta_n})f_2^2(\Delta_n,\mu) - X^2_{j\Delta_n} - 2X_{j\Delta_n}f_1(X_{j\Delta_n})f_2(\Delta_n,\mu) = \\
&= g_1(X_{j\Delta_n})g_2(\Delta_n,\mu) + f_1^2(X_{j\Delta_n})f_2^2(\Delta_n,\mu)
\end{aligned}
$$

pelo que,

$$
\mathbb{V}[Y_{j\Delta_n}|\mathcal{F}_j^N] \leq 2g_1(X_{j\Delta_n})g_2(\Delta_n,\mu) + 4f_1^2(X_{j\Delta_n})f_2^2(\Delta_n,\mu).
$$

donde

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[Y^2_{j\Delta_n} f_1^2(X_{j\Delta_n})] \leq \\
&\leq \mathbb{E}[f_1^2(X_{j\Delta_n})(2g_1(X_{j\Delta_n})g_2(\Delta_n,\mu) + 4f_1^2(X_{j\Delta_n})f_2^2(\Delta_n,\mu))] = \\
&= 2g_2(\Delta_n,\mu)\mathbb{E}[f_1^2(X_{j\Delta_n})g_1(X_{j\Delta_n})] + 4f_2^2(\Delta_n,\mu)\mathbb{E}[f_1^4(X_{j\Delta_n})] = O(\Delta_n),
\end{aligned} \tag{21}
$$

tendo em atenção que pelas condições (4.3) e (4.4), $f_1(X_{j\Delta_n}) \leq C_1(1+|X_{j\Delta_n}|^p)$, $f_2(\Delta_n,\mu) = O(\Delta_n)$ e $g_1(X_{j\Delta_n}) \leq C_2(1+|X_{j\Delta_n}|^q)$ e $g_2(\Delta_n,\mu) = O(\Delta_n)$, e ainda porque

$$
\begin{aligned}
&(C_1(1+|X_{j\Delta_n}|^p))^2(C_2(1+|X_{j\Delta_n}|^q)) \leq \\
&\quad \leq 2C_1C_2^2(1+|X_{j\Delta_n}|^{2p} + |X_{j\Delta_n}|^q + |X_{j\Delta_n}|^{2p+q})
\end{aligned}
$$

e

$$
(C_1(1+|X_{j\Delta_n}|^p))^4 \leq C_1^4(1+4|X_{j\Delta_n}|^p + 6|X_{j\Delta_n}|^{2p} + 4|X_{j\Delta_n}|^{3p} + |X_{j\Delta_n}|^{4p})
$$

pelo que o facto de

$$
\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^r] < \infty,
$$

com $r = \max(4p, 2p+q)$ ser suficiente para se obter que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=0}^{N-1}\left[Y_{j\Delta_n}\left(\mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \right.\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left.\left. -\mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}]\right)\mathbb{I}_{(R_p\times R_p)\cap(\widehat{R}_q\times\widehat{R}_q)}\right]\right| > \varepsilon\right] \\
&\leq \frac{O(\Delta_n^2)}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{N} O(\Delta_n) = \frac{O(\Delta_n^3)}{\varepsilon^2\Delta_n^2} \to 0, \Delta_n \to 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Observação 4.7 *A segunda soma consiste numa soma de um número de termos proporcional a $\sqrt{N}$, isto é, $\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)} \propto \sqrt{N}$, porque o número de mudanças de regime num intervalo $[0,\sqrt{N}]$ não se altera pelo efeito do aumento do número de observações nesse intervalo (N observações) devido à diminuição de Δ_n mas sim pelo aumento da amplitude do intervalo ($\sqrt{N}$).*

Para a segunda soma, com $Y_{\tau_j} = X_{(n_j+1)\Delta_n} - \mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}]$, teremos, uma vez mais, pela condição (4.3),

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left[Y_{\tau_j}\left(\mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}]-\mathbb{E}_{\mu_r}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}]\right)\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}\right]=$$
$$=\sum_{j=0}^{N-1}\left[Y_{\tau_j}\left(X_{\tau_j}+f_1(X_{\tau_j})f_2((n_j+1)\Delta_n-\tau_j,\mu_q)\right.\right.$$
$$\left.\left.-X_{n_j\Delta_n}-f_1(X_{n_j\Delta_n})f_2(\Delta_n,\mu_r)\right)\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}\right], \tag{23}$$

podendo-se escrever,

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left[Y_{\tau_j}\left(\mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{\tau_j}]-\mathbb{E}_{\mu_r}[X_{(n_j+1)\Delta_n}|X_{n_j\Delta_n}]\right)\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}\right]=$$
$$=\sum_{j=0}^{N-1}Y_{\tau_j}(X_{\tau_j}-X_{n_j\Delta_n})\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1}Y_{\tau_j}f_1(X_{\tau_j})f_2((n_j+1)\Delta_n-\tau_j,\mu_q)\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}$$
$$-\sum_{j=0}^{N-1}Y_{\tau_j}f_1(X_{n_j\Delta_n})f_2(\Delta_n,\mu_r)\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}$$

Observação 4.8 *Pode-se reescrever a terceira soma,*

$$\sum_{j=0}^{N-1}Y_{\tau_j}f_1(X_{n_j\Delta_n})f_2(\Delta_n,\mu_r)\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}=$$
$$=f_2(\Delta_n,\mu_r)\sum_{j=0}^{N-1}Y_{\tau_j}f_1(X_{n_j\Delta_n})\mathbb{I}_{(R_p\times R_q)\cap(\widehat{R}_r\times\widehat{R}_r)}\,.$$

Repare-se que, analogamente ao que foi feito anteriormente, para $i<j$

temos,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[Y_{\tau_i} f_1(X_{\tau_i}) f_2((n_i+1)\Delta_n - \tau_i, \mu_q) Y_{\tau_j} f_1(X_{\tau_j}) f_2((n_j+1)\Delta_n - \tau_j, \mu_q)] = \\ &= \mathbb{E}[Y_{\tau_i} f_1(X_{\tau_i}) f_2((n_i+1)\Delta_n - \tau_i, \mu_q) \times \\ &\qquad \times f_1(X_{\tau_j}) f_2((n_j+1)\Delta_n - \tau_j, \mu_q) \mathbb{E}[Y_{\tau_j} | \mathcal{F}^N_{n_j}]] = 0,\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[Y_{\tau_i} f_1(X_{n_i\Delta_n}) Y_{\tau_j} f_1(X_{n_j\Delta_n})] = \mathbb{E}[Y_{\tau_i} f_1(X_{n_i\Delta_n}) f_1(X_{n_j\Delta_n}) \mathbb{E}[Y_{\tau_j} | \mathcal{F}^N_{n_j}]] = 0,$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[Y_{\tau_i}(X_{\tau_i} - X_{n_i\Delta_n}) Y_{\tau_j}(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})] = \\ &= \mathbb{E}[Y_{\tau_i}(X_{\tau_i} - X_{n_i\Delta_n})(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n}) \mathbb{E}[Y_{\tau_j} | \mathcal{F}^N_{n_j}]] = 0\end{aligned}$$

uma vez que $\mathbb{E}[Y_{\tau_j} | \mathcal{F}^N_{n_j}] = 0$.

Teremos então, usando Chebyshev, e o facto de $f_2(\Delta_n, \mu) = O(\Delta_n)$, que

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=0}^{N-1} Y_{\tau_j} f_1(X_{\tau_j}) f_2((n_j+1)\Delta_n - \tau_j, \mu_q)\right| > \varepsilon\right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[Y^2_{\tau_j} f_1^2(X_{\tau_j}) f_2^2((n_j+1)\Delta_n - \tau_j, \mu_q)\right] \leq \\ &\leq \frac{f_2^2(\Delta_n, \mu_q)}{\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[Y^2_{\tau_j} f_1^2(X_{\tau_j})\right] = \frac{O(\Delta_n^2)}{\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[Y^2_{\tau_j} f_1^2(X_{\tau_j})\right], \qquad (24)\\ &\mathbb{P}\left[\left|O(\Delta_n) \sum_{j=0}^{N-1} Y_{\tau_j} f_1(X_{n_j\Delta_n})\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{O(\Delta_n^2)}{\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[Y^2_{\tau_j} f_1^2(X_{n_j\Delta_n})\right], \\ &\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=0}^{N-1} Y_{\tau_j}(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}\left[Y^2_{\tau_j}(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2\right],\end{aligned}$$

de forma análoga ao que foi feito anteriormente e tendo em atenção que $X_{\tau_j} \in \{m, M\}$ prova-se que,

$$\mathbb{E}[Y^2_{\tau_j} f_1^2(X_{j\Delta_n})] = O(\Delta_n), \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[Y^2_{\tau_j} f_1^2(X_{\tau_j})] = O(\Delta_n). \qquad (25)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^2_{\tau_j}(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2] &= \mathbb{E}[(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2 \mathbb{E}[Y^2_{\tau_j} | \mathcal{F}^N_{n_j}]] \leq \\ &\leq 2g_2(\Delta_n, \mu) \mathbb{E}[g_1(X_{\tau_j})(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2] + \\ &+ 4f_2^2(\Delta_n, \mu) \mathbb{E}[f_1^2(X_{\tau_j})(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2] = \qquad (26)\\ &= 2g_2(\Delta_n, \mu) g_1(X_{\tau_j}) \mathbb{E}[(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2] + \\ &+ 4f_2^2(\Delta_n, \mu) f_1^2(X_{\tau_j}) \mathbb{E}[(X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2] = O(\Delta_n^2),\end{aligned}$$

porque $\mathbb{E}[X_{\tau_j} - X_{n_j\Delta_n})^2] = O(\Delta_n)$ (lema (5.1)) e uma vez mais por $X_{\tau_j} \in \{m, M\}$. Pode-se concluir que cada uma das somas tende para zero, completando-se a prova. $\square$

Afirmação 4.9 *A soma em (14) é positiva.*

Demonstração. Será suficiente mostrar que, para $p, q = 1, 2, p \neq q$

$$\sum_{j=0}^{N-1} (\mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])^2 \mathbb{I}_{(R_p \times R_p) \cap (\widehat{R}_q \times \widehat{R}_q)} > 0\ . \quad (27)$$

Pela condição (4.3) podemos escrever

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N-1} (\mathbb{E}_{\mu_p}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}] - \mathbb{E}_{\mu_q}[X_{(j+1)\Delta_n}|X_{j\Delta_n}])^2 \mathbb{I}_{(R_p \times R_p) \cap (\widehat{R}_q \times \widehat{R}_q)} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_1(X_{j\Delta_n}) f_2(\Delta_n, \mu_p) - f_1(X_{j\Delta_n}) f_2(\Delta_n, \mu_q)\right)^2 \mathbb{I}_{(R_p \times R_p) \cap (\widehat{R}_q \times \widehat{R}_q)} = \\ &= (f_2(\Delta_n, \mu_p) - f_2(\Delta_n, \mu_q))^2 \sum_{j=0}^{N-1} f_1^2(X_{j\Delta_n}) \mathbb{I}_{(R_p \times R_p) \cap (\widehat{R}_q \times \widehat{R}_q)}, \end{aligned} \quad (28)$$

Pelo que o resultado segue tendo em conta que

$$(f_2(\Delta_n, \mu_p) - f_2(\Delta_n, \mu_q))^2 = O(\Delta_n^2) \quad \text{e} \quad \sum \mathbb{I}_{(R_p \times R_p) \cap (\widehat{R}_q \times \widehat{R}_q)} \propto N = \frac{1}{\Delta_n^2}$$

.

$\square$

Finalmente, em (12) temos $LSE_N(m_0, M_0)$, em (13) temos uma soma que converge para zero (afirmação (4.6)), a soma em (14) é estritamente positiva (afirmação (4.9)).

Todos estes factos implicam que, para N suficientemente grande, estamos perante uma contradição à escolha de $(\widehat{m}_N, \widehat{M}_N)$ como o estimador que minimiza a soma do quadrados dos erros.

$\square$

5 Resultados auxiliares

Este resultado foi utilizado na demostração da consistência dos estimadores.

Lema 5.1 *Sob as condições (4.1) e (4.2), temos que* $\forall s < t$,

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^2\right] = O(|t-s|). \tag{29}$$

Demonstração. Como $(a+b)^2 \leq (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ e por aplicação da isometria de Ito,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t a(\mu, X_u)du + \int_s^t b(\sigma, X_u)dB_u\right|^2\right] \leq \\
&\leq 2\left(\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t a(\mu, X_u)du\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t b(\sigma, X_u)dB_u\right|^2\right]\right) = \\
&= 2\left(\mathbb{E}\left[\left|\int_s^t a(\mu, X_u)du\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t b^2(\sigma, X_u)du\right|\right]\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Pela desigualdade de Hölder podemos escrever,

$$\begin{aligned}
&\int_s^t |a(\mu, X_u)|du = \|a(\mu, X_u)\|_{L^1([s,t],\lambda)} \leq L\|a(\mu, X_u)\|_{L^2([s,t],\lambda)} = \\
&= L\left|\int_s^t |a(\mu, X_u)|^2 du\right|^{1/2}, \text{ com } L = \lambda([s,t])^{1/2} = |t-s|^{1/2}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Então,

$$\left|\int_s^t a(\mu, X_u)du\right|^2 \leq \left|\int_s^t |a(\mu, X_u)|du\right|^2 \leq |t-s| \int_s^t |a(\mu, X_u)|^2 du, \tag{32}$$

e

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^2\right] \leq 2\left(|t-s| \int_s^t \mathbb{E}\left[|a(\mu, X_u)|^2\right] du + \int_s^t \mathbb{E}\left[|b(\sigma, X_u)|^2\right] du\right). \tag{33}$$

Como consequência de

$$\begin{aligned}
|a(\mu, x)| + |b(\sigma, x)| \leq C(1+|x|) \Rightarrow |a(\mu, x)|^2 \leq 2C^2(1+|x|^2) \wedge |b(\sigma, x)|^2 \leq \\
\leq 2C^2(1+|x|^2)
\end{aligned}$$

e de

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty$$

podemos concluir que

$$\int_s^t \mathbb{E}\left[|a(\mu, X_u)|^2\right] du = O(t-s) \quad \wedge \quad \int_s^t \mathbb{E}\left[|b(\sigma, X_u)|^2\right] du = O(t-s)$$

e que,

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^2\right] = O(|t-s|^2) + O(|t-s|) = O(|t-s|). \tag{34}$$

Com isto conclui-se a prova do lema. □

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio parcial da FCT (Fundação para a Ciência e Tecnologia), programa POCTI (Portugal/FEDER-EU).

Referências

[1] Adams, M. Guillemin, V. (1996). *Measure theory and probability.* Birkhäuser.

[2] Chan, K. S. (1993). *Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model.* The Annals of Statistics 21(1), 520–533.

[3] Chan, K.S. Tsay, R. S. (1998). *Limiting properties of the least squares estimator of a continuous threshold autoregressive model.* Biometrika 85(2), 413–426.

[4] Freidlin, M. Pfeiffer, R. (1998). A threshold estimation problem for processes with hysteresis. *Statistics & Probability Letters.*, Vol.36, p. 337-347.

[5] Mota, P. P. (2004). *A estimation procedure for the brownian motion (with drift) threshold model.* Stochastic Finance 2004.

[6] Petruccelli, J. D. (1986). *On the consistency of least squares estimators for a threshold AR(1) mode.* Journal of Time Series Analysis vol. 7, n-4, 269–278.

[7] Prakasa Rao, B.L.S. (1999). *Statistical inference for diffusion type processes.* Arnold Publishers.

[8] Tong, H. (1990). *Non-linear Time Series - A dynamical system approach.* Oxford University Press.

[9] Williams, D. (1991). *Probability with martingales.* Cambridge University Press.