Pequenas Perturbações com Grandes Efeitos

no

Value-at Risk

Manuel L. Esquível*

Luís Dimas**

João Tiago Mexia*

Philippe Didier*

Lisboa 2011

*** Centro de Matemática e Aplicações – Linha de Estatística e Gestão do Risco, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e Departamento de Matemática da FCT/UNL.**

**** Colégio Militar**

Pequenas Perturbações com Grandes Efeitos no *Value-at-Risk*

Manuel L. Esquível * Luís Dimas João Tiago Mexia Philippe Didier

22 de Fevereiro de 2011

Resumo

Mostramos que no modelo *delta-normal* é possível perturbar a distribuição normal multivariada dos retornos de uma carteira de tal forma que as distribuições marginais dos retornos sejam praticamente indistinguíveis das distribuições não perturbadas mas de tal forma que o V@R da carteira seja próximo do pior V@R possível que, sob hipóteses que supomos serem verificadas na prática e neste modelo, é a soma dos V@Rs de cada um dos activos na carteira.

1 Introdução

De acordo com McNeil, Frey e Embrechts, em [7, p. 38], dado um nível de confiança $\alpha \in]0,1[$ o *Value-at-Risk* de uma carteira, de montante global igual a uma unidade monetária, com perdas e ganhos X, ao nível de confiança α e no período T, que representaremos por $\mathrm{V@R}_\alpha^X$, é dado pelo menor número l tal que a probabilidade das perdas da carteira exceder l, no período T, não seja maior que $1-\alpha$. Por outras palavras, o *Value-at-Risk* é, genericamente, um quantil da distribuição de perdas da carteira num dado período. De assinalar também que tanto nas exposições mais teóricas como nas mais aplicadas o *Value-at-Risk* pode aparecer calculado sobre a distribuição das perdas e ganhos ou sobre a distribuição só das perdas tomadas com valores positivos. É imediato verificar (veja-se ainda [7, p. 39]) que para uma carteira, de montante global igual a uma unidade monetária, com perdas e ganhos Z tendo distribuição Gaussiana de média μ e desvio padrão σ tem-se que, sendo Φ a função de distribuição da normal estandardizada,

$$\mathrm{V@R}_\alpha^Z = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha) \ , \tag{1}$$

em que, usualmente $\alpha \in \{0.05, 0.01, 0.003\}$. Na prática (veja-se [7, p. 38] e [6, p. 111]), é muita vezes usada a quantidade denominada *V@R médio*, $\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^Z := \mathrm{V@R}_\alpha^Z - \mu$ em que μ é o valor médio da distribuição de perdas e ganhos, ou seja no caso em que a distribuição de perdas e ganhos é Gaussiana:

$$\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^Z = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) \ . \tag{2}$$

*Departamento de Matemática FCT/UNL e CMA/FCT/UNL, Quinta da Torre, 2829-516 Caparica .

No modelo *delta-normal* há dois pressupostos notáveis; o primeiro é que a distribuição conjunta dos retornos dos activos individuais é normal multivariada, pelo que cada um dos retornos dos activos individuais tem, também, distribuição Gaussiana (veja-se a referência [6, p. 162]). O segundo é a forma geral da distribuição de perdas e ganhos que é dada pelo produto dos retornos pelo capital investido, no activo ou na carteira, (veja-se adiante a secção 2); dado que este capital é determinístico a distribuição das perdas e ganhos também é Gaussiana. Um enquadramento geral para o cálculo do *Value-at-Risk* no modelo *delta-normal* é o denominado método da variância-covariância exposto em [2, p. 37] ou [7, p. 48]. Nas aplicações práticas correntes deste método, *V@R médio* da carteira, é obtido a partir do vector coluna $\mathbf{V}$, que tem como componentes os *V@Rs médios* de cada um dos activos e, a partir da matriz $\not{\mathbf{R}}$ das correlações entre os retornos dos activos individuais, pela fórmula notável, justificada na secção 2,

$$\left(\mathrm{V@R}^X_{\alpha,\ \mathrm{mean}}\right)^2 = \mathbf{V}^t \not{\mathbf{R}} \mathbf{V} \ , \tag{3}$$

e que é referida, por exemplo, em [1, p. 23].

Observação 1. Uma observação imediata e importante que decorre da fórmula (3), é que se $\mathbf{V}^t = (V_1, \ldots, V_N)$ e $\not{\mathbf{R}} = [\rho_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ então, com a convenção já referida acima de considerar todas as perdas com o mesmo sinal, isto é, se $V_i \geq 0$ (ou se $V_i \leq 0$) para todo o $i \in \{1, \ldots, N\}$ e $\rho_{ij} \in [-1, 1]$ para $i, j \in \{1, \ldots, N\}$, tem-se sempre:

$$\mathbf{V}^t \not{\mathbf{R}} \mathbf{V} = \sum_{i,j=1}^{N} V_i V_j \rho_{ij} \leq \sum_{i,j=1}^{N} V_i V_j = \left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right)^2 \ . \tag{4}$$

Esta observação é sugerida em [6, p. 164] para o caso de uma carteira com dois activos. Isto é, sob a hipótese dos *Value-at-Risk* dos activos individuais serem todos não negativos, no modelo *delta-normal* o *Value-at-Risk* máximo da carteira é dado pela soma dos *Value-at-Risk* dos activos individuais.

O objectivo desta nota é mostrar que pequenas perturbações dos retornos individuais dos activos, não detectáveis, por exemplo no teste de Kolmogorov-Smirnov, podem alterar o *Value-at-Risk* da carteira para um valor próximo do pior valor que este V@R pode tomar de acordo com a fórmula (4). Numa carteira aparentemente bem diversificada com um número de activos da ordem das centenas se, de facto, as correlações entre os activos se alterarem devido a perturbações indetectáveis em cada activo individual, o *Value-at-Risk* da carteira pode tomar valores substanciais inesperados. Assim, também fica realçada a importância, no modelo *delta-normal*, de uma matriz das correlações dos retornos dos activos que seja rigorosa e realista.

2 O cálculo do V@R no modelo *delta-normal*

Nesta secção procuramos sistematizar a metodologia do cálculo do *Value-at-Risk* no modelo *delta-normal*. Consideremos uma carteira composta por $N > 0$ activos. Representemos por $\mathbf{W} = (W_1, \ldots, W_N)$ o vector (coluna) dos montantes investidos em cada activo e por $W_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} W_i$ o montante total investido. Designaremos por $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$

o vector (coluna) das proporções do investimento em cada um dos activos, isto é, em que para cada $i \in \{i, \dots, N\}$ se tem $\omega_i = W_i/W_\Sigma$. Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ o vector (coluna) dos retornos aditivos dos activos individuais na carteira. A primeira hipótese do modelo *delta-normal* é que $\mathbf{X}$ tem distribuição normal multivariada, o que representaremos por $\mathbf{X} \frown \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}), \not{\Sigma}(\mathbf{X})\right)$ em que $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X})$ é o vector médio e $\not{\Sigma}(\mathbf{X})$ é a matriz de variâncias-covariâncias. Um primeiro resultado estabelece a forma e a distribuição tanto, dos retornos como, das perdas e ganhos da carteira.

Proposição 1. *Considerando retornos aditivos e sendo* $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_N])$, *retorno da carteira* X_Σ *verifica:*

$$X_\Sigma = \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{X} \quad \text{e ainda } X_\Sigma \frown \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}], \sqrt{\boldsymbol{\omega}^t \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\omega}}\right) .$$

e, consequentemente, as perdas e ganhos da carteira $P\&G_\Sigma$ *verificam:*

$$P\&G_\Sigma = W \times X_\Sigma = W \times \left(\boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{X}\right) \tag{5}$$

e ainda

$$P\&G_\Sigma \frown \mathcal{N}\left(W \times \left(\boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbb{E}[\mathbf{X}]\right), W \times \sqrt{\boldsymbol{\omega}^t \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\omega}}\right) . \tag{6}$$

Demonstração. Observe-se que, decorrido um período o novo valor total da carteira é a soma dos novos valores dos activos individuais da carteira. Seja então W_Σ^t o valor da carteira à data t. Tem-se, usando a definição de retorno aditivo para cada um dos activos da carteira, que:

$$\begin{aligned} W_\Sigma^{t+1} &= \sum_{i=1}^N W_i^{t+1} = \sum_{i=1}^N W_i^t \times (1 + X_i) = W_\Sigma^t + W_\Sigma^t \times \sum_{i=1}^N X_i \times \frac{W_i^t}{W_\Sigma^t} = \\ &= W_\Sigma^t \times (1 + \sum_{i=1}^N X_i \times \omega_i) = W_\Sigma^t \times (1 + X_\Sigma) , \end{aligned}$$

ficando assim demonstrado que $X_\Sigma = \boldsymbol{\omega}^t \cdot \mathbf{X}$. De onde resulta, imediatamente, que X_Σ sendo combinação linear de componentes de um vector Gaussiano é uma variável aleatória Gaussiana com a distribuição indicada (veja-se [8, p. 414]). As perdas e ganhos de um investimentos obtêem-se considerando a diferença entre o novo valor da carteira, decorrido um período e o valor inicial, isto é, para o caso da carteira, por exemplo:

$$\mathrm{P\&G}_\Sigma = W_\Sigma^{t+1} - W_\Sigma^t = W_\Sigma^t \times (1 + X_\Sigma) - W_\Sigma^t = W_\Sigma^t \times X_\Sigma$$

de onde resulta imediatamente a fórmula (5) e por aplicação dos resultados conhecidos sobre a distribuição Gaussiana univariada o resultado relativo à distribuição das perdas e ganhos dado em (6). □

Em consequência das fórmulas (1) e (2) tem-se o seguinte resultado fundamental.

Corolário 1. *No modelo delta-normal tem-se que ao nível de confiança* $\alpha \in]0,1[$*:*

$$V@R_{\alpha}^{P\&G_{\Sigma}} = W \times \left(\boldsymbol{\omega}^{t} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right]\right) + W \times \sqrt{\boldsymbol{\omega}^{t} \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\omega}} \times \Phi^{-1}(\alpha)$$

e também

$$V@R_{\alpha,\ mean}^{P\&G_{\Sigma}} = W \times \sqrt{\boldsymbol{\omega}^{t} \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \boldsymbol{\omega}} \times \Phi^{-1}(\alpha) = \sqrt{\mathbf{W}^{t} \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{W}} \times \Phi^{-1}(\alpha)\ . \tag{7}$$

Finalmente, temos a demonstração da fórmula (3) correntemente usada na prática. Seja $\not{\Sigma}(\mathbf{X}) = [\mathrm{cov}(X_i, X_j)]_{i,j\in\{1,\dots,N\}}$ e ainda a matriz de correlações dos retornos dos activos $\not{\mathbf{R}}(\mathbf{X}) = [\rho(X_i, X_j)]_{i,j\in\{1,\dots,N\}}$. Para melhor entendimento da proposição seguinte impõe-se uma observação preliminar sobre as matrizes de variância-covariância.

Observação 2. Como se tem para qualquer vector coluna $\mathbf{W} = (W_1, \dots W_N)$ de números reais que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{t} \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{W} &= \sum_{i,j} W_i W_j \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i,j} W_i W_j \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])\right] = \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E}\left[W_i (X_i - \mathbb{E}[X_i]) W_j (X_j - \mathbb{E}[X_j])\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_i W_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right] \geq 0\ ,
\end{aligned}$$

o sinal de $\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{\mathrm{P\&G}_{\Sigma}}$ na fórmula (7) é dado pelo sinal de $\Phi^{-1}(\alpha)$.

Corolário 2. *No modelo delta-normal tem-se que ao nível de confiança* $\alpha \in]0,1[$*, se* $\mathbf{V}$ *representar o vector coluna que tem como componentes os V@Rs médios de cada um dos activos:*

$$V@R_{\alpha,\ mean}^{P\&G_{\Sigma}} = \begin{cases} +\sqrt{\mathbf{V}^{t}\not{\mathbf{R}}(\mathbf{X})\mathbf{V}} & se\ \alpha \in]\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & se\ \alpha = \frac{1}{2} \\ -\sqrt{\mathbf{V}^{t}\not{\mathbf{R}}(\mathbf{X})\mathbf{V}} & se\ \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\ . \end{cases}$$

Demonstração. Bastará observar que, em consequência da fórmula (2) aplicada a cada um dos activos da carteira,

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^{t} \cdot \not{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{W} \times \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2 &= \sum_{i,j} \left(W_i \Phi^{-1}(\alpha)\right) \mathrm{cov}(X_i, X_j) \left(W_j \Phi^{-1}(\alpha)\right) = \\
&= \sum_{i,j} \left(W_i \Phi^{-1}(\alpha)\sigma(X_i)\right) \frac{\mathrm{cov}(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} \left(W_j \Phi^{-1}(\alpha)\sigma(X_j)\right) = \\
&= \sum_{i,j} \mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{(W_i X_i)}\, \rho(X_i, X_j)\, \mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{(W_j X_j)} = \mathbf{V}^{t}\not{\mathbf{R}}(\mathbf{X})\mathbf{V}\ ,
\end{aligned}$$

tal como queríamos demonstrar. □

Observação 3 (Fundamental). Em resultado do corolário 2 podemos complementar a observação 1. No modelo *delta-normal*, sob a hipótese dos *Value-at-Risk* dos activos individuais terem todos o mesmo sinal, o pior *Value-at-Risk* da carteira é dado pela soma dos *Value-at-Risk* dos activos individuais. Note-se que, no modelo *delta-normal*, pela fórmula (2) tal acontece, forçosamente, se os *Value-at-Risk* dos activos individuais forem todos tomados com o mesmo nível de confiança α.

3 Pequenas perturbações Gaussianas

Nesta secção apresentamos resultados que mostram como efectuar, em variáveis Gaussianas, pequenas perturbarções no sentido da distância de Kolmogorov, de tal forma que a distribuição perturbada permanece Gaussiana com a mesma média. Tratamos primeiro o caso univariado e, seguidamente, o caso multivariado.

3.1 Pequenas perturbações Gaussianas univariadas

Consideremos as seguintes notações. Escrevemos $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ para representar uma variável aleatória com distribuição Gaussiana (ou normal) com média μ e desvio padrão $\sigma > 0$ tendo como a densidade de probabilidade:

$$F'_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] ,$$

e observamos que para uma tal variável aleatória a função característica é:

$$\phi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) . \tag{8}$$

O resultado seguinte garante-nos a existência de pequenas perturbações Gaussianas univariadas.

Teorema 1. *Seja $X \frown \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ e $E \frown \mathcal{N}(0, \epsilon)$ tais que $X \perp\!\!\!\perp E$. Então tem-se que $X + E \frown \mathcal{N}(\mu, \sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2})$ e, supondo que $\epsilon < \sigma$, a seguinte estimativa da distância de Kolmogorov entre as funções de distribuição de $X + E$ e X:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{X+E}(x) - F_X(x)| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^{2n} = \frac{1}{\pi}\ln\left(1 + \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^2\right) . \tag{9}$$

Em particular, dado que em (9) se tem uma série alternada cujo módulo do termo geral decresce para zero, verifica-se ainda que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{X+E}(x) - F_X(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^2 . \tag{10}$$

Demonstração. Dado que a soma de duas Gaussianas independentes é ainda Gaussiana, a demonstração é uma consequência da desigualdade de Esseen (veja-se [4] ou citada em [5, p. 538] ou ainda [11, p. 296]), tendo-se que para todo o $T > 0$:

$$\sup_x |F_{X+E}(x) - F_X(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|\frac{\phi_{X+E}(t) - \phi_X(t)}{t}\right| dt + \frac{24}{\pi T}\sup_x \left|F'_X(x)\right| .$$

Com efeito, em consequência de (8), do facto de F'_X ser limitada, do facto de X e E serem independentes (e por isso se ter $\phi_{X+E} = \phi_X \cdot \phi_E$), temos:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{X+E}(x) - F_X(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\phi_{X+E}(t) - \phi_X(t)|}{t} dt \leq$$
$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} |\phi_X(t)| \frac{|\phi_E(t) - 1|}{t} dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{1 - e^{-\frac{\epsilon^2 t^2}{2}}}{t} dt \, .$$

Considerando o desenvolvimento em série de potências usual da função exponencial tem-se, pela convergência uniforme da série da função exponencial em qualquer intervalo fechado limitado que:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{1 - e^{-\frac{\epsilon^2 t^2}{2}}}{t} dt = \frac{2}{\pi} \lim_{N\in\mathbb{N}\to+\infty} \int_0^{N} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{\epsilon^{2n} t^{2n-1}}{2^n} \right) dt =$$
$$= \frac{2}{\pi} \lim_{N\in\mathbb{N}\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{2n}}{n!\, 2^n} \left(\int_0^N t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \right) \, .$$

Para concluir, note-se que com a mudança de variável $\sigma t = u$, seguida de integração por partes e indução, se tem:

$$\int_0^{+\infty} t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sigma^{2n}} \int_0^{+\infty} u^{2n-1} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sigma^{2n}} 2^{n-1} (n-1)! \, .$$

Assim sendo, como

$$\int_0^{N} t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt = \int_0^{+\infty} t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt - \int_N^{+\infty} t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \leq \frac{2^{n-1}(n-1)!}{\sigma^{2n}} \, , \quad (11)$$

tem-se, observando que somar uma série é integrar relativamente a μ_c, medida de contagem nos inteiros, que:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{2n}}{n!\, 2^n} \left(\int_0^N t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \right) =$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \int_{\{1,2,\dots,n,\dots\}} \frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{2n}}{n!\, 2^n} \left(\int_0^N t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \right) d\mu_c(n) \, .$$

Observe-se que para $\epsilon < \sigma$ se tem, em virtude da fórmula (11), que

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{2n}}{n!\, 2^n} \left(\int_0^N t^{2n-1} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \right) \right| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \right)^{2n} \, ,$$

em que o membro da direita é o termo geral de uma série convergente, ou seja, tal que:

$$\int_{\{1,2,\dots,n,\dots\}} \frac{1}{n} \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \right)^{2n} d\mu_c(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \right)^{2n} < +\infty \, .$$

Finalmente, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue verifica-se que:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,\frac{1-e^{-\frac{\epsilon^2 t^2}{2}}}{t}dt = \frac{2}{\pi}\lim_{N\in\mathbb{N}\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{2n}}{n!\;2^n}\left(\int_0^N t^{2n-1}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}dt\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\epsilon^{2n}}{n!\;2^n}\lim_{N\in\mathbb{N}\to+\infty}\left(\int_0^N t^{2n-1}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}dt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^{2n},$$

obtendo-se o resultado anunciado em (9) somando a série do membro mais à direita desta última sequência de igualdades.. □

Observação 4. Pode observar-se directamente que perturbar dados Gaussianos com uma Gaussiana centrada e com dispersão pequena (relativamente à da Gaussiana a perturbar) não altera significativamente o V@R. Com efeito, com as notações do teorema 1, tem-se para $\alpha \in]0,1[$ que $\mathrm{V@R}_\alpha^{X+E} = \mu + \sqrt{\sigma^2+\epsilon^2}\,\Phi^{-1}(\alpha)$ e $\mathrm{V@R}_\alpha^{X} = \mu + \sigma\,\Phi^{-1}(\alpha)$ (tal como já referido na fórmula (1)), pelo que para $\epsilon \ll \sigma$ se tem:

$$\left|\mathrm{V@R}_\alpha^{X+E} - \mathrm{V@R}_\alpha^{X}\right| = \left|1-\sqrt{1+\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^2}\right|\sigma\left|\Phi^{-1}(\alpha)\right| \approx \left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right)^2\frac{\sigma\left|\Phi^{-1}(\alpha)\right|}{2}. \qquad (12)$$

Note-se que, tal como seria de esperar, a aproximação do V@R perturbado pelo V@R não perturbado é da mesma ordem de grandeza que a aproximação obtida para as funções de distribuição no teorema 1, isto é, da ordem de $(\epsilon/\sigma)^2$.

Observação 5. Seja $F_{X+E}^{(n)}$ a função de distribuição empírica de uma amostra de dimensão n da variável $X+E$. Como se verifica que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X+E}^{(n)}(x) - F_{X+E}(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X+E}^{(n)}(x) - F_{X}(x)\right| + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X+E}(x) - F_{X}(x)\right|, \quad (13)$$

o teorema 1 mostra que para $\epsilon \ll \sigma$ e, para uma amostra de dimensão suficientemente grande, as distribuições de X e $X+E$ são praticamente indistinguíveis pelo teste de Kolmogorov-Smirnov. Mais precisamente, suponhamos que o modelo proposto é o descrito pela variável aleatória X mas que o modelo mais adequado seria o modelo perturbado $X+E$. Tal implica que, de facto, observamos $F_{X+E}^{(n)}$ e não $F_X^{(n)}$. Assim, ao efectuarmos o teste de Kolmogorov-Smirnov calculamos $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X+E}^{(n)}(x) - F_X(x)\right|$ em vez de calcularmos $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X}^{(n)}(x) - F_X(x)\right|$. Por exemplo (veja-se a secção 4 adiante), suponhamos uma amostra de 36 retornos aditivos mensais de um activo cotado no PSI-20 e ainda que $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X+E}^{(36)}(x) - F_X(x)\right| = 0.262$. Se $\epsilon \ll \sigma$ de tal forma que $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_{X+E}(x) - F_X(x)\right| < 0.0001$, não rejeitamos o modelo X ao nível de significância de 99% e, pela fórmula (13), também não rejeitaríamos o modelo $X+E$. (Para as notações e valores numéricos usados nesta observação veja-se [8, pp. 284-286, 536]).

3.2 Pequenas perturbações Gaussianas multivariadas

O teorema 1 sugere que se defina uma pequena perturbação Gaussiana de uma variável Gaussiana como qualquer variável Gaussiana independente da primeira e com uma variância estritamente inferior. A observação 4 da subsecção 3.1 mostra a influência de uma pequena perturbação Gaussiana no V@R. A observação 5 mostra que, dado um certo nível de significância, se a variância da perturbação for suficientemente pequena esta perturbação é indetectável por um teste baseado na distância de Kolmogorov para esse nível de significância.

Consideremo-nos no contexto do modelo *delta-normal*. Vamos mostrar seguidamente como construir a matriz de variâncias-covariâncias de uma perturbação Gaussiana multivariada dos retornos, independente destes, de forma a que se tenha um V@R da carteira tão perto quanto possível do V@R maximal de acordo com as observações 1 e 3. O método segue os seguintes passos.

1. Para definir os termos diagonais, escolham-se $\delta_1, \delta_2 > 0$ majorantes, respectivamente, para o erro máximo admissível na distância entre os V@Rs da distribuição original e da distribuição perturbada e para o erro máximo admissível na distância de Kolmogorov entre as mesmas distribuições. Tal escolha valerá para cada componente X_i dos retornos e E_i das perturbações. Então, no que toca à distância entre os V@Rs, se for:

$$\left|\mathrm{V@R}_\alpha^{X_i+E_i} - \mathrm{V@R}_\alpha^{X_i}\right| = \left|\sqrt{\sigma(X_i)^2 + \sigma(E_i)^2} - \sigma(X_i)\right| \left|\Phi^{-1}(\alpha)\right| = \delta_1$$

virá que o desvio padrão da perturbação E_i deverá ser:

$$\sigma(E_i) = \sqrt{\frac{2\delta_1\sigma(X_i)}{|\Phi^{-1}(\alpha)|} + \left(\frac{\delta_1}{|\Phi^{-1}(\alpha)|}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2\delta_1\sigma(X_i)}{|\Phi^{-1}(\alpha)|}} \ ,$$

com a aproximação no caso em que se tem $\delta_1 \ll \left|\Phi^{-1}(\alpha)\right|$; note-se que esta aproximação é a mesma que se obteria se se usasse directamente a estimativa dada pela fórmula (12). No que diz respeito à distância de Kolmogorov temos, usando a majoração da fórmula (9), que se

$$\frac{1}{\pi}\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma(E_i)}{\sigma(X_i)}\right)^2\right) = \delta_2 \ ,$$

então também teremos que a variância da perturbação E_i deverá ser:

$$\sigma(E_i) = \sigma(X_i)\sqrt{e^{\delta_2\pi} - 1} \approx \sigma(X_i)\sqrt{\delta_2\pi} \ , \tag{14}$$

com a aproximação a valer quando $\delta_1\pi \ll 1$; note-se que esta aproximação é a mesma que se obteria se se usasse directamente a estimativa dada pela fórmula (10). Em consequência devemos definir para cada componente das perturbações E_i:

$$\sigma(E_i) = \min\left(\sqrt{\frac{2\delta_1\sigma(X_i)}{|\Phi^{-1}(\alpha)|} + \left(\frac{\delta_1}{|\Phi^{-1}(\alpha)|}\right)^2}, \sigma(X_i)\sqrt{e^{\delta_2\pi} - 1}\right) \ . \tag{15}$$

2. Para definir os termos não diagonais note-se que pela independência entre os retornos dados $\mathbf{X}$ e a perturbação multivariada $\mathbf{E}$, se tem que a matriz de variância-covariância de $\mathbf{X}+\mathbf{E}$ verifica $\not{\Sigma}(\mathbf{X}+\mathbf{E}) = \not{\Sigma}(\mathbf{X}) + \not{\Sigma}(\mathbf{E})$. Considere-se $\not{\Sigma}(\mathbf{E}) = [\mathrm{cov}(E_i, E_j)]_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ e ainda $\not{\mathbf{R}}(\mathbf{X}+\mathbf{E}) = [\rho(X_i+E_i, X_j+E_j)]_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$, a matriz de correlações dos dados perturbados. A clássica majoração de Cauchy-Schwarz seguinte,
$$|\mathrm{cov}(E_i, E_j)| \leq \sigma(E_i)\sigma(E_j)\ , \tag{16}$$
mostra que a matriz de variâncias-covariâncias das perturbações não pode ser totalmente arbitrária. Assim, para finalizar a construção tem-se que, pela fórmula (16), uma primeira solução consiste em escolher o limite superior nesta fórmula. Uma tal escolha dos termos não diagonais da matriz de variâncias-covariâncias da perturbação de acordo com este processo pode dar origem a uma matriz singular com muitos valores próprios nulos. Para ultrapassar esta dificuldade podem escolher-se os termos não diagonais da matriz de variâncias-covariâncias, $\mathrm{cov}(E_i, E_j)$ ao acaso num intervalo da forma $[\sigma(E_i)\sigma(E_j) - \gamma, \sigma(E_i)\sigma(E_j)]$ para γ pequeno. No caso de se obter uma matriz que não seja definida positiva pode alterar-se ligeiramente a matriz com uma técnica de correcção inspirada na que é dada em [9] (veja-se também [10]) para matrizes de correlação e cujos passos descrevemos seguidamente. Seja então $C = [c_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ a matriz de variâncias-covariâncias inicial, relativa aos retornos de N activos, que supomos ser simétrica mas com alguns valores próprios negativos e, por isso, não definida positiva. Seja Λ a matriz diagonal com os valores próprios de C, representados por $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, ordenados por ordem de valor absoluto decrescente e M a matriz ortogonal dos vectores próprios à direita associados, isto é, a matriz verificando: $C \cdot M = M \cdot \Lambda$ [1].

   (a) Considere-se $|\Lambda|$ a matriz diagonal com os valores absolutos dos valores próprios ordenados por ordem decrescente, isto é com a mesma ordem dos elementos da matriz Λ.

   (b) Sendo $M = [m_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$, seja $T = [t_{ij}]_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ a matriz diagonal de pesos definida, para $i = j$, por:
$$t_{ii} := \frac{c_{ii}}{\sum_{k=1}^{N} m_{ik}^2\,|\lambda_k|}\ . \tag{17}$$

   (c) Sendo $\sqrt{T}$ e $\sqrt{|\Lambda|}$ as matrizes diagonais cujos elementos diagonais são as raízes quadradas dos elementos das matrizes diagonais de T e de Λ, respectivamente, então se for $B := \sqrt{T}M\sqrt{|\Lambda|}$ Seja por definição:
$$C_{\mathrm{alt}} := B \cdot B^t = \left(\sqrt{T}M\sqrt{|\Lambda|}\right)\left(\sqrt{T}M\sqrt{|\Lambda|}\right)^t = \sqrt{T}M\,|\Lambda|\,M^t\sqrt{T}\ , \tag{18}$$
   a matriz alterada pela variante do procedimento de Rebonato já referido. O teorema 2 descreve as principais propriedades de C_{alt} e dá uma estimativa da distância entre C e C_{alt} em função de parâmetros que apenas dependem de C.

[1] Dado que consideramos M ortogonal, os vectores coluna são ortonormais e $C = M\Lambda M^{-1} = M\Lambda M^t$.

Teorema 2 (Variante do procedimento de Rebonato)**.** *Seja C a matriz de variâncias-covariâncias inicial que supomos ser simétrica mas com alguns valores próprios negativos. A matriz C_{alt} dada pela fórmula (18) é, por construção, uma matriz simétrica, definida positiva, com os termos diagonais idênticos aos termos diagonais de C e tal que, sendo $|||\cdot|||_F$ a norma de Frobenius de matrizes,*

$$|||C - C_{alt}|||_F \leq \left(\sum_{i,j=1}^{N} (1 - \sqrt{t_{ii}}\sqrt{t_{jj}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\sum_{i:\lambda_i<0} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \qquad (19)$$

em que os termos da forma t_{ii} são dados pela fórmula (17) e $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ são os valores próprios de C.

Demonstração. Sendo $C_{\text{alt}} := B \cdot B^t$ com $B := \sqrt{T}M\sqrt{|\Lambda|}$ invertível, C_{alt} é necessariamente simétrica e definida positiva. Sendo $C_{\text{alt}} = [c_{ik}^{\text{alt}}]_{i,k\in\{1,\ldots,N\}}$ tem-se, pela igualdade da direita na fórmula (18), que:

$$c_{ik}^{\text{alt}} = \sqrt{t_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{N} m_{ij} \, |\lambda_j| \, m_{kj} \right) \sqrt{t_{kk}} \ ,$$

o que necessariamente traz, pela fórmula (17), que para $i = k$, os termos diagonais c_{ii}^{alt} de C_{alt}, verificam:

$$c_{ii}^{\text{alt}} = t_{ii} \left(\sum_{j=1}^{N} m_{ij} \, |\lambda_j| \, m_{ij} \right) = c_{ii} \ ,$$

tal como foi afirmado. Para demonstar a estimativa da fórmula (19), considere-se a seguinte matriz $|C| := M \, |\Lambda| \, M^{-1} = M \, |\Lambda| \, M^t$. Pela desigualdade triangular tem-se que:

$$|||C - C_{\text{alt}}|||_F \leq |||C_{\text{alt}} - |C|\,|||_F + |||\,|C| - C|||_F \ .$$

Como a norma de Frobenius é invariante para transformações ortogonais tem-se que:

$$\begin{aligned} |||\,|\Lambda| - \Lambda|||_F &= |||M \, (|\Lambda| - \Lambda) \, M^t|||_F = |||(M \, |\Lambda| - M\Lambda) \, M^t|||_F = \\ &= |||M \, |\Lambda| \, M^t - M\Lambda M^t|||_F = |||\,|C| - C|||_F \ . \end{aligned}$$

Como $|\Lambda| - \Lambda$ é a matriz diagonal que em que os únicos termos não nulos são os termos da forma $2\,|\lambda_i|$ para $\lambda_i < 0$, vem, pela propriedade da norma de Frobenius $|||A|||_F = \sqrt{\text{Traço}(AA^t)}$, que:

$$|||\,|C| - C|||_F = |||\,|\Lambda| - \Lambda|||_F = \sqrt{\text{Traço}((|\Lambda| - \Lambda)^2)} = 2 \left(\sum_{i:\lambda_i<0} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Seja $\mathbf{1}$ a matriz $N \times N$ com todas as entradas iguais a um. Defina-se a matriz $\tilde{T} := [\sqrt{t_{ii}}\sqrt{t_{kk}}]_{i,k\in\{1,\ldots,N\}}$ e designe-se por $A \circ B$ o produto de Hadamard das matrizes A e B. Tem-se então, pelas propriedades do produto de Hadamard, pelo facto da norma de

Frobenius ser sub-multiplicativa e, mais uma vez, pela invariância da norma de Frobenius para transformações ortogonais, que:

$$\begin{aligned}|||C_{\text{alt}} - |C|\,|||_{\text{F}} &= \left|\left|\left| |C| - \tilde{T} \circ |C| \right|\right|\right|_{\text{F}} = \left|\left|\left| \mathbf{1} \circ |C| - \tilde{T} \circ |C| \right|\right|\right|_{\text{F}} = \left|\left|\left| \left(\mathbf{1} - \tilde{T}\right) \circ |C| \right|\right|\right|_{\text{F}} \leq \\ &\leq \left|\left|\left| \left(\mathbf{1} - \tilde{T}\right) \right|\right|\right|_{\text{F}} |||\,|C|\,|||_{\text{F}} = \left|\left|\left| \left(\mathbf{1} - \tilde{T}\right) \right|\right|\right|_{\text{F}} |||\,|\Lambda|\,|||_{\text{F}} \ .\end{aligned}$$

Para concluir basta observar que,

$$|||\,|\Lambda|\,|||_{\text{F}} = \sqrt{\text{Traço}(|\Lambda|\,|\Lambda|^t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2}\ ,$$

e que, com um pouco de paciência para os cálculos, se tem:

$$\left|\left|\left| \left(\mathbf{1} - \tilde{T}\right) \right|\right|\right|_{\text{F}} = \sqrt{\text{Traço}\left(\left(\mathbf{1} - \tilde{T}\right)\left(\mathbf{1} - \tilde{T}\right)^t\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(1 - \sqrt{t_{ii}}\sqrt{t_{jj}}\right)^2}\ ,$$

tal como foi anunciado. □

Observação 6. Seria interessante ter, para a norma espectral, uma estimativa mais fina que a obtida na fórmula (19) para a norma de Frobenius (e até, se possível, optimal). Note-se que, se $|||\cdot|||$ designar a norma espectral se tem para, por exemplo, a matriz invertível C: $|||C||| \leq |||C|||_{\text{F}} \leq N\,|||C|||$.

Observação 7. Uma consequência da condição da fórmula (16) e da independência é a seguinte. Como:

$$\rho(X_i + E_i, X_j + E_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j) + \text{cov}(E_i, E_j)}{\sqrt{\sigma(X_i)^2 + \sigma(E_i)^2}\sqrt{\sigma(X_j)^2 + \sigma(E_j)^2}}\ ,$$

para $i \neq j$ virá o seguinte majorante para as correlações dos dados perturbados:

$$\rho(X_i + E_i, X_j + E_j) \leq \frac{\text{cov}(X_i, X_j) + \sigma(E_i)\sigma(E_j)}{\sqrt{\sigma(X_i)^2 + \sigma(E_i)^2}\sqrt{\sigma(X_j)^2 + \sigma(E_j)^2}}\ . \tag{20}$$

A fórmula (20) mostra que a correlação dos dados perturbados não pode ser arbitrariamente próxima da matriz com todas as entradas iguais a um, matriz com a qual se obteria o V@R maximal. Com efeito tem-se ainda que, atendendo à fórmula (14),

$$\begin{aligned}\rho(X_i + E_i, X_j + E_j) &\leq \rho(X_i, X_j) + \rho(E_i, E_j)\frac{\sigma(E_i)}{\sigma(X_i)}\frac{\sigma(E_j)}{\sigma(X_j)} \leq \\ &\leq \rho(X_i, X_j) + \frac{\sigma(E_i)}{\sigma(X_i)}\frac{\sigma(E_j)}{\sigma(X_j)} \approx \rho(X_i, X_j) + \delta_2\pi^2\ ,\end{aligned}$$

ou seja, uma majoração das correlações dos dados perturbados pela correlação dos dados não perturbados mais um termo com um erro com a mesma ordem de grandeza que o que foi considerado para cada uma das distribuições das perturbações individuais.

O teorema seguinte mostra que, caso seja definida positiva a matriz das correlações dos dados perturbados com os termos não diagonais dados pelos termos à direita na fórmula (20), o V@R maximal para a carteira com os retornos perturbados fica determinado.

Teorema 3. *Considere-se, para $i = 1, \ldots, N$, os desvios padrão das perturbações $\sigma(E_i)$ definidos pela fórmula (15). Seja para $i = j$ $\rho_{ii}^{max} = 1$ e para $i \neq j$ os termos não diagonais de uma matriz de correlações maximal dados por*

$$\rho_{ij}^{max} := \rho^{max}(X_i + E_i, X_j + E_j) := \frac{cov(X_i, X_j) + \sigma(E_i)\sigma(E_j)}{\sqrt{\sigma(X_i)^2 + \sigma(E_i)^2}\sqrt{\sigma(X_j)^2 + \sigma(E_j)^2}}\ , \tag{21}$$

supondo-se que para $i \neq j$ se tem $\rho_{ij}^{max} \in [-1, 1]$ e que a matriz $\mathbf{R}^{max} = [\rho_{ij}^{max}]_{i,j\in\{i,\ldots,N\}}$ é definida positiva. Então, o V@R médio da carteira com a distribuição perturbada, para $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, é dado por:

$$V@R_{\alpha,\ mean}^{P\&G_{\Sigma}} = -\left(\sum_{i,j=1}^{N} \sqrt{\sigma(X_i)^2 + \sigma(E_i)^2}\sqrt{\sigma(X_j)^2 + \sigma(E_j)^2}\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2 \rho_{ij}^{max}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Demonstração. Resulta imediatamente do corolário 2 e da fórmula (2), observando que para cada activo $i \in \{1, \ldots, N\}$ se tem que o correspondente V@R perturbado é dado por: $\sqrt{\sigma(X_i)^2 + \sigma(E_i)^2}\,\Phi^{-1}(\alpha)$. □

Observação 8. Por exemplo, supondo que se escolhem δ_1 e δ_2 de tal forma que na fórmula (15) se tem:

$$\sigma(E_i) = \sqrt{\frac{2\delta_1\sigma(X_i)}{|\Phi^{-1}(\alpha)|} + \left(\frac{\delta_1}{|\Phi^{-1}(\alpha)|}\right)^2}\ ,$$

o V@R médio da carteira com a distribuição perturbada, para $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, é dado por:

$$\begin{aligned}\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{\mathrm{P\&G}_{\Sigma}} = -\Bigg(&\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{X_i}\right| + \delta_1\right)^2 + \\ &+ 2\sum_{i<j}\mathrm{cov}(X_i, X_j)\left|\Phi^{-1}(\alpha)\right| + \sqrt{\left(2\delta_1\left|\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{X_i}\right| + \delta_1^2\right)\left(2\delta_1\left|\mathrm{V@R}_{\alpha,\ \mathrm{mean}}^{X_j}\right| + \delta_1^2\right)}\Bigg)^{\frac{1}{2}} .\end{aligned}$$

4 Aplicação a dados reais

A aplicação prática que apresentamos seguidamente foi desenvolvida também em [3] com o fim de ilustrar os resultados teóricos aqui obtidos numa carteira com dados reais. Os dez activos que constituem a carteira e os respectivos pesos nesta são: MillenniumBCP (0.16), SEMAPA (0.075), BES (0.11), EDP (0.05), Teixeira Duarte (0.075), Brisa (0.09), Mota-Engil (0.125), Portucel (0.14), SonaeCom (0.075) e ZonMultimédia

(0.1); obtiveram-se os preços de fecho mensais entre Maio 2007 e Maio de 2010, num total de 37 observações para cada activo. Todos os retornos aditivos foram testados e a normalidade não foi rejeitada em nenhum deles. Note-se que uma vez que pela fórmula (7) o V@R médio é proporcional ao valor total da carteira vamos supor, doravante, que este corresponde a uma unidade monetária arbitrária. Assim, no que vai seguir-se, os diferentes valores obtidos para o V@R médio poderão ser lidos como percentagens do valor total da carteira.

Observação 9. Note-se que de acordo com o exposto na secção 2 foram calculados retornos aditivos em vez dos usuais retornos multiplicativos. Por definição tem-se que:

$$X_{t+1} = e^{R_m} X_t \text{ e } \quad X_{t+1} = (1 + R_a)\, X_t \ .$$

Logo, quando os retornos aditivos R_a são pequenos tem-se a aproximação usual destes pelos retornos multiplicativos R_m:

$$R_a = \frac{X_{t+1}}{X_t} - 1 \text{ e } \quad R_m = \ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{X_{t+1}}{X_t} - 1\right)\right) \approx R_a \ .$$

Quando a hipótese de partida é que os preços admitem como modelo um processo, contínuo, Browniano geométrico os retornos multiplicativos são normais e independentes. No caso dos retornos aditivos justifica-se assim um teste de normalidade e independência. Todos os retornos aditivos forma testados e a normalidade não foi rejeitada em nenhum deles.

Apresentamos seguidamente um sumário dos resultados da aplicação a dados reais realizada com o software *Mathematica 7 TM* [2]. Primeiramente apresentamos resultados determinísticos e depois resultados de uma simulação de retornos perturbados.

- Os V@Rs médios dos activos da carteira estão na tabela seguinte

BCP	SEMAPA	BES	EDP	TD
−0.0294738	−0.00813451	−0.0219616	−0.00524454	−0.0239367
mboxBRISA	ME	PORTUCEL	SC	ZONM
−0.0116766	−0.0236536	−0.0181462	−0.0157889	−0.0158876

  podendo constatar-se que são todos estritamente negativos.

- A matriz de correlações dos retornos da carteira é:

$$\begin{pmatrix}
1. & 0.536943 & 0.501863 & 0.504386 & 0.693002 & 0.481457 & 0.634432 & 0.685172 & 0.568424 & 0.291741 \\
0.536943 & 1. & 0.329862 & 0.482692 & 0.452211 & 0.482051 & 0.575146 & 0.6985 & 0.549704 & 0.398151 \\
0.501863 & 0.329862 & 1. & 0.358602 & 0.554839 & 0.254522 & 0.434221 & 0.573287 & 0.21797 & 0.219641 \\
0.504386 & 0.482692 & 0.358602 & 1. & 0.624471 & 0.486734 & 0.649065 & 0.474597 & 0.491444 & 0.614233 \\
0.693002 & 0.452211 & 0.554839 & 0.624471 & 1. & 0.463714 & 0.75793 & 0.629351 & 0.647732 & 0.458374 \\
0.481457 & 0.482051 & 0.254522 & 0.486734 & 0.463714 & 1. & 0.43694 & 0.307819 & 0.508416 & 0.472373 \\
0.634432 & 0.575146 & 0.434221 & 0.649065 & 0.75793 & 0.43694 & 1. & 0.697902 & 0.721713 & 0.496363 \\
0.685172 & 0.6985 & 0.573287 & 0.474597 & 0.629351 & 0.307819 & 0.697902 & 1. & 0.559298 & 0.26979 \\
0.568424 & 0.549704 & 0.21797 & 0.491444 & 0.647732 & 0.508416 & 0.721713 & 0.559298 & 1. & 0.407846 \\
0.291741 & 0.398151 & 0.219641 & 0.614233 & 0.458374 & 0.472373 & 0.496363 & 0.26979 & 0.407846 & 1.
\end{pmatrix}$$

- O V@R médio da carteira calculado com a matriz de correlação acima é -0.13238 e o V@R médio máximo de acordo com a observação 3 é -0.173904.

[2]Os ficheiros de dados e computacionais usados para obter os resultados desta aplicação estão disponíveis na página: http://ferrari.dmat.fct.unl.pt/personal/mle/pps/pm-mle2009a.html .

- Fixámos $\delta_1 = \delta_2 = 0.1$ e determinaram-se os desvios padrão das perturbações de cada activo de acordo com a fórmula (15) obtendo-se o resultado seguinte para as correspondentes variâncias:

BCP	SEMAPA	BES	EDP	TD
0.00462948	0.00160487	0.00543804	0.00150098	0.0138965

BRISA	ME	PORTUCEL	SC	ZONM
0.0022964	0.00488509	0.00229201	0.00604614	0.00344364

- A matriz de correlações maximal dos retornos perturbados da carteira, de acordo com o teorema 3 e usando os desvios padrão das perturbações de cada activo de acordo com a fórmula (15) é:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0.661782 & 0.636159 & 0.638002 & 0.775768 & 0.621255 & 0.732988 & 0.770049 & 0.684776 & 0.482685 \\
0.661782 & 1 & 0.51053 & 0.622157 & 0.599894 & 0.621689 & 0.689686 & 0.779784 & 0.671102 & 0.560408 \\
0.636159 & 0.51053 & 1 & 0.531521 & 0.674854 & 0.455501 & 0.586753 & 0.688328 & 0.428803 & 0.430024 \\
0.638002 & 0.622157 & 0.531521 & 1 & 0.725713 & 0.625109 & 0.743676 & 0.616244 & 0.628549 & 0.718235 \\
0.775768 & 0.599894 & 0.674854 & 0.725713 & 1 & 0.608296 & 0.823191 & 0.729277 & 0.742702 & 0.604395 \\
0.621255 & 0.621689 & 0.455501 & 0.625109 & 0.608296 & 1 & 0.588739 & 0.494429 & 0.640945 & 0.61462 \\
0.732988 & 0.689686 & 0.586753 & 0.743676 & 0.823191 & 0.588739 & 1 & 0.779347 & 0.796738 & 0.632142 \\
0.770049 & 0.779784 & 0.688328 & 0.616244 & 0.729277 & 0.494429 & 0.779347 & 1 & 0.67811 & 0.466652 \\
0.684776 & 0.671102 & 0.428803 & 0.628549 & 0.742702 & 0.640945 & 0.796738 & 0.67811 & 1 & 0.567489 \\
0.482685 & 0.560408 & 0.430024 & 0.718235 & 0.604395 & 0.61462 & 0.632142 & 0.466652 & 0.567489 & 1
\end{pmatrix}$$

- De acordo com o anunciado acima, verifica-se o resultado importante seguinte. O V@R médio maximal da carteira calculado de acordo com o teorema 3 é -0.169373, valor próximo do V@R médio máximo de acordo com a observação 3 que é -0.173904.

Apresentamos seguidamente um exemplo de simulação. Geram-se perturbações Gaussianas dos retornos da carteira de acordo com o descrito no ponto 2 da secção 3.2. Calculam-se os V@R médios correspondentes aos activos perturbados e o V@R da carteira correspondente. Finalmente testa-se a igualdade das distribuições entre os retornos perturbados e os retornos não perturbados.

- Na tabela seguinte figura um exemplo para a matriz de variâncias-covariâncias das perturbações construída de acordo com o descrito no ponto 2 da secção 3.2. A matriz inicial, tendo os termos não diagonais $\mathrm{cov}(E_i, E_j)$ com distribuição uniforme no intervalo $[\sigma(E_i)\sigma(E_j) - \gamma, \sigma(E_i)\sigma(E_j)]$ com $\gamma = 0.0003$, não é definida positiva pelo que se aplicou o procedimento inspirado na técnica de Rebonato. A distância, na norma de espectral, entre a matriz inicial e a alterada pelo procedimento referido é

$$|||C - C_{\mathrm{alt}}||| = 0.000966904 \,. \tag{22}$$

A distância, na norma de Frobenius entre a matriz inicial e a alterada pelo procedimento referido é

$$|||C - C_{\mathrm{alt}}|||_{\mathrm{F}} = 0.00118581 \,, \tag{23}$$

enquanto que o valor dado pela estimativa da fórmula (19) é 0.018035. A distância, na norma L^2, entre o vector dos valores próprios da matriz inicial e o vector dos valores próprios da matriz alterada é 0.00093739. Estes valores mostram que o procedimento adoptado para tornar definida positiva a matriz inicial não a altera significativamente.

$$\begin{pmatrix}
0.00462948 & 0.00243161 & 0.00474283 & 0.00237048 & 0.00768371 & 0.00300684 & 0.00454294 & 0.00302123 & 0.00498116 & 0.00372861 \\
0.00243161 & 0.00160487 & 0.00260782 & 0.00128149 & 0.00425536 & 0.00172881 & 0.00255902 & 0.00164626 & 0.00282326 & 0.0020485 \\
0.00474283 & 0.00260782 & 0.00543804 & 0.00261205 & 0.00846626 & 0.00328975 & 0.00492237 & 0.00330779 & 0.00545914 & 0.00428287 \\
0.00237048 & 0.00128149 & 0.00261205 & 0.00150098 & 0.00417551 & 0.00160927 & 0.00246857 & 0.00158358 & 0.00272291 & 0.00205702 \\
0.00768371 & 0.00425536 & 0.00846626 & 0.00417551 & 0.0138965 & 0.00530218 & 0.00797838 & 0.00545472 & 0.00909434 & 0.00663685 \\
0.00300684 & 0.00172881 & 0.00328975 & 0.00160927 & 0.00530218 & 0.0022964 & 0.00311825 & 0.00209201 & 0.00349994 & 0.00256291 \\
0.00454294 & 0.00255902 & 0.00492237 & 0.00246857 & 0.00797838 & 0.00311825 & 0.00488509 & 0.00320718 & 0.00521483 & 0.0039619 \\
0.00302123 & 0.00164626 & 0.00330779 & 0.00158358 & 0.00545472 & 0.00209201 & 0.00320718 & 0.00229201 & 0.00355778 & 0.00265984 \\
0.00498116 & 0.00282326 & 0.00545914 & 0.00272291 & 0.00909434 & 0.00349994 & 0.00521483 & 0.00355778 & 0.00604614 & 0.00424298 \\
0.00372861 & 0.0020485 & 0.00428287 & 0.00205702 & 0.00663685 & 0.00256291 & 0.0039619 & 0.00265984 & 0.00424298 & 0.00344364
\end{pmatrix}$$

- Seguidamente, a matriz de correlação estimada dos retornos perturbados que pode ser comparada com matriz de correlações maximal dos retornos perturbados da carteira apresentada acima e também com a matriz de correlações dos dados.

$$\begin{pmatrix}
1. & 0.554303 & 0.621826 & 0.619775 & 0.750747 & 0.543739 & 0.664592 & 0.654136 & 0.617989 & 0.395403 \\
0.554303 & 1. & 0.506898 & 0.479895 & 0.527978 & 0.474216 & 0.577874 & 0.688877 & 0.598485 & 0.431842 \\
0.621826 & 0.506898 & 1. & 0.503109 & 0.651489 & 0.365691 & 0.537997 & 0.608097 & 0.373782 & 0.373647 \\
0.619775 & 0.479895 & 0.503109 & 1. & 0.707298 & 0.524962 & 0.695847 & 0.512143 & 0.581329 & 0.679555 \\
0.750747 & 0.527978 & 0.651489 & 0.707298 & 1. & 0.587654 & 0.78935 & 0.663062 & 0.708392 & 0.555212 \\
0.543739 & 0.474216 & 0.365691 & 0.524962 & 0.587654 & 1. & 0.50459 & 0.328454 & 0.560986 & 0.49873 \\
0.664592 & 0.577874 & 0.537997 & 0.695847 & 0.78935 & 0.50459 & 1. & 0.674641 & 0.752655 & 0.564118 \\
0.654136 & 0.688877 & 0.608097 & 0.512143 & 0.663062 & 0.328454 & 0.674641 & 1. & 0.583369 & 0.346179 \\
0.617989 & 0.598485 & 0.373782 & 0.581329 & 0.708392 & 0.560986 & 0.752655 & 0.583369 & 1. & 0.510543 \\
0.395403 & 0.431842 & 0.373647 & 0.679555 & 0.555212 & 0.49873 & 0.564118 & 0.346179 & 0.510543 & 1.
\end{pmatrix}$$

- Na tabela seguinte figuram os V@Rs médios dos activos da carteira perturbada que podem ser comparados com os V@Rs médios iniciais dos activos da carteira apresentados acima. A norma da diferença entre o vector dos V@Rs médios iniciais e o vector dos V@Rs médios da carteira perturbada é 0.0128048 mostrando que a perturbação, embora sendo pequena, altera os V@Rs no seu conjunto.

BCP	SEMAPA	BES	EDP	TD
−0.0318634	−0.0086518	−0.0249565	−0.0056083	−0.0260704
mboxBRISA	ME	PORTUCEL	SC	ZONM
−0.0122701	−0.0251029	−0.0202031	−0.0166392	−0.0175773

- De acordo com o anunciado verifica-se o segundo resultado importante desta aplicação a dados reais. Neste exemplo de simulação, o V@R médio da carteira com os retornos perturbados é −0.1766 que, neste caso, até supera o valor do V@R médio máximo de acordo com a observação 3, já referido acima, que é −0.173904.

- Verificou-se que, para cada activo, a distribuição dos retornos inicial é indistinguível da distribuição dos retornos perturbados com um teste de Kolmogorov e um teste de Kolmogorov-Smirnov, com ambos os níveis de significância 0.05 e 0.01. Com o teste de Kolmogorov não se rejeitou, para cada um dos activos, a hipótese de que a distribuição dos retornos perturbados é Gaussiana com a média e o desvio padrão estimados a partir dos retornos iniciais. Com o teste de Kolmogorov-Smirnov não se rejeitou, para cada um dos activos, a hipótese de que são idênticas as distribuições dos retornos perturbados e dos retornos iniciais.

5 Conclusão e questões em aberto

Numa aplicação prática do modelo *delta-normal* assume-se, geralmente, uma dada matriz de correlações *a priori*. Os resultados aqui apresentados mostram que as distribuições dos retornos dos activos individuais podem ter sido alteradas por perturbações indetectáveis estatisticamente mas de forma a que a alteração na matriz de correlações seja significativa ao ponto do V@R da carteira estar, de facto, próximo do V@R maximal. Assim, na perspectiva do controlo do risco, a mera indicação do valor do V@R da carteira é manifestamente insuficiente. Assim deverá sempre ser explicitada a a forma como foi obtida a matriz de correlações usada e, também, o V@R maximal da carteira.

Uma questão relevante para complementar o trabalho aqui apresentado é a de um teste tendo como hipótese nula que a matriz de variância-covariância dos dados perturbados é igual à matriz de variância-covariância dos dados iniciais.

Na secção 3.2 observámos que sendo C uma matriz de variâncias-covariâncias objectivo e C_{alt} a correspondente alteração pelo procedimento de Rebonato modificado então a norma espectral $|||C - C_{\text{alt}}|||$ deve ser pequena. Esta propriedade, confirmada na aplicação tal como indicámos acima, carece de justificação (veja-se a fórmula (22) e veja-se também a observação 6). Conjectura-se, em consonância com os resultados numéricos apresentados acima, que a norma referida é comparável à norma Euclideana da diferença entre o vector dos valores próprios alterados e o vector dos valores próprios inicial [3].

Uma forma de comparar a matriz de correlação estimada dos retornos perturbados $\not{\mathbf{R}}_{\text{est}}(\mathbf{X} + \mathbf{E})$ com a matriz estimada dos dados iniciais $\not{\mathbf{R}}_{\text{est}}(\mathbf{X})$ é definindo um índice de perturbação dado pelo cociente da norma de Frobënius da diferença entre as duas matrizes pela norma do pior caso possível que é a diferença entre a matriz com todas as entradas iguais a um e a matriz identidade. No caso da aplicação prática teríamos:

$$I_{\text{per}} := \frac{|||\not{\mathbf{R}}_{\text{est}}(\mathbf{X} + \mathbf{E}) - \not{\mathbf{R}}_{\text{est}}(\mathbf{X})|||}{\sqrt{N^2 - N}} = \frac{1.3423}{90} = 0.01491444 \, ,$$

ou seja uma perurbação com um índice inferior a 1.5%, confirmando a ideia de que, mesmo nas correlações, se trata de uma pequena perturbação com grandes efeitos. Sublinhamos que o estudo das propriedades deste índice poderá ter algum interesse.

Referências

[1] Philip Best. *Implementing Value at Risk*. John Wiley & Sons Ltd, first edition, May 1998.

[2] Moorad Choudhry. *An Introduction to Value at Risk, 4th Ed.* John Wiley & Sons Inc, fourth edition, April 2006.

[3] Luís Dimas. *Sobre a Influência de Pequenas Perturbações no Cálculo do "Value-at-Risk"de uma Carteira de Activos*. Universidade Lusíada de Lisboa, Lisboa, 2011. Dissertação de Mestrado, Texto em Português.

[4] Carl-Gustav Esseen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. *Acta Math.*, 77:1–125, 1945.

[5] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[6] Philippe Jorion. *Value at Risk, 3rd Ed.* McGraw-Hill, October 2006.

[7] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, and Paul Embrechts. *Quantitative risk management*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Concepts, techniques and tools.

[8] Wiebe R. Pestman. *Mathematical statistics*. de Gruyter Textbook. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998. An introduction.

[3] A matriz $\sqrt{T}$ normaliza e a diferença, entre C e a alterada, reside nos valores próprios.

[9] Riccardo Rebonato and Peter Jäckel. The most general methodology to create a valid correlation matrix for risk management and option pricing purposes. *preprint.*, 1999.

[10] K. Schöttle and R. Werner. Improving the most general methodology to create a valid correlation matrix. In C. A. Brebbia, editor, *Risk Analysis IV*. Wessex Institute of Technology Press, 2004.

[11] A. N. Shiryaev. *Probability*, volume 95 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1996. Translated from the first (1980) Russian edition by R. P. Boas.

Pequenas perturbações com grandes efeitos no Value - at - Risk

```
Needs["Combinatorica`"]
```

Dados

```
T1 = Import["DadosVar2.xls"];
```

Comentário : o montante da carteira condiciona a P & G pelo que convencionamos pô - lo igual à unidade. Os activos são: BCP, Semapa, Bes, EDP, Teixeira Duarte, Brisa Mota-Engil, Portucel, SonaeCom e Zon Multimédia; retornos mensais de Maio 2007 a Maio de 2010. Todos os retornos aditivos forma testados e a normalidade não é regeitada.

```
MontanteCarteira = 1; PesosCarteira = {0.16, 0.075, 0.11, 0.05, 0.075, 0.09, 0.125, 0.14, 0.075, 0.1};
```

```
MatrixForm[T1[[1]]]
```

3.77	12.62	17.03	4.23	4.13	9.89	7.07	2.94	4.88	12.15
4.14	13.34	16.48	4.09	4.05	9.95	7.1	3.	4.9	11.91
3.76	12.93	17.21	4.17	3.6	10.01	6.5	3.08	4.73	11.81
3.43	12.31	15.88	4.03	2.95	9.43	5.69	2.83	4.	12.
2.91	11.43	15.9	4.1	2.04	9.2	5.35	2.59	3.42	10.44
3.34	11.2	16.72	4.44	2.46	9.8	5.7	2.63	3.87	9.39
2.99	10.07	15.88	4.61	2.23	10.35	5.18	2.42	3.84	9.48
2.92	8.77	15.	4.47	2.09	10.05	5.12	2.23	3.3	9.55
2.09	7.84	11.77	4.26	1.4	9.92	4.17	1.93	2.3	8.95
1.91	8.07	11.91	3.88	1.52	9.98	4.56	2.1	2.37	8.2
2.06	8.1	11.01	3.84	1.51	9.05	4.81	2.23	2.15	7.51
1.8	9.	12.22	4.06	1.55	9.13	5.73	2.43	2.23	8.58
1.63	8.8	11.59	4.05	1.64	9.16	5.46	2.26	2.24	6.99
1.38	7.92	9.91	3.32	0.9	7.34	4.09	2.03	2.12	5.28
1.14	7.48	9.65	3.52	1.04	6.52	3.78	1.84	1.92	6.23
1.18	7.68	8.82	3.47	1.03	6.34	3.64	2.03	1.95	5.36
1.14	6.9	8.65	2.94	1.	7.	3.05	1.84	1.65	5.19
0.91	6.87	7.5	2.69	0.73	6.02	2.54	1.68	1.23	4.
0.8	6.57	5.78	2.66	0.63	5.9	2.35	1.45	1.04	3.82
0.81	6.4	6.69	2.69	0.6	5.35	2.35	1.55	1.	3.71
0.8	6.36	5.2	2.78	0.55	5.17	2.44	1.48	1.12	4.22
0.64	6.	4.64	2.51	0.42	4.66	2.22	1.46	1.11	3.78
0.62	6.35	2.93	2.61	0.47	5.2	2.52	1.44	1.49	4.01
0.71	6.35	3.72	2.76	0.77	5.18	3.29	1.62	1.88	4.15
0.76	6.26	4.	2.84	0.98	5.21	3.24	1.68	1.89	4.02
0.72	5.79	3.84	2.79	0.95	5.12	3.23	1.75	1.76	3.79
0.75	6.43	4.38	2.78	0.94	5.81	2.99	1.72	1.84	3.99
0.91	6.95	4.59	3.02	1.05	6.18	3.41	1.9	1.83	4.17
1.01	7.73	4.85	3.13	1.1	6.73	3.8	2.1	2.04	4.63
0.97	7.52	5.02	3.01	1.07	6.71	4.04	1.92	1.95	4.32
0.88	7.36	4.66	3.05	1.04	6.67	3.82	1.89	1.78	4.26
0.85	7.76	4.57	3.11	1.05	7.18	3.94	1.98	1.93	4.34
0.79	7.61	4.21	2.87	0.94	6.87	3.3	1.91	1.82	4.1
0.74	7.07	3.66	2.69	0.84	5.89	3.15	1.84	1.59	3.73
0.82	7.85	4.	2.94	1.06	6.28	3.24	2.11	1.6	3.8
0.7	7.6	3.6	2.69	0.9	5.31	2.71	2.02	1.31	3.31
0.69	7.64	3.5	2.71	0.96	5.34	2.69	2.03	1.32	3.41

```
Dados[n_Integer] := Transpose[T1[[1]]][[n]]
```

Cálculo dos Retornos e do V@R dos activos individuais

```
RetornosM[n_Integer] := Table[(Dados[n][[j + 1]] / Dados[n][[j]]) - 1, {j, 1, Length[Dados[n]] - 1}]

VarZeroActivo[n_Integer, q_] :=
 Quantile[NormalDistribution[Mean[RetornosM[n]], StandardDeviation[RetornosM[n]]], q] *
  MontanteCarteira * PesosCarteira[[n]]

VarMedioActivo[n_Integer, q_] :=
 (Quantile[NormalDistribution[Mean[RetornosM[n]], StandardDeviation[RetornosM[n]]], q] - Mean[RetornosM[n]]) *
  MontanteCarteira * PesosCarteira[[n]]
```

```
VectorVARSZero = Table[VarZeroActivo[i, 0.05], {i, 1, 10}]
```

{-0.035833, -0.00901448, -0.0258397, -0.00575585,
 -0.0255424, -0.0129218, -0.0261606, -0.0191566, -0.0178625, -0.0188804}

```
VectorVARSMedio = Table[VarMedioActivo[i, 0.05], {i, 1, 10}]
```

{-0.0294738, -0.00813451, -0.0219616, -0.00524454,
 -0.0239367, -0.0116766, -0.0236536, -0.0181462, -0.0157889, -0.0158876}

```
TabRetornos = Transpose[Table[RetornosM[j], {j, 1, 10}]]; MatrixForm[TabRetornos]
```

0.0981432	0.0570523	-0.0322959	-0.0330969	-0.0193705	0.00606673	0.00424328	0.0204082	0.0040983
-0.0917874	-0.0307346	0.0442961	0.0195599	-0.111111	0.00603015	-0.084507	0.0266667	-0.034693
-0.087766	-0.0479505	-0.0772807	-0.0335731	-0.180556	-0.0579421	-0.124615	-0.0811688	-0.154334
-0.151603	-0.0714866	0.00125945	0.0173697	-0.308475	-0.0243902	-0.059754	-0.0848057	-0.145
0.147766	-0.0201225	0.0515723	0.0829268	0.205882	0.0652174	0.0654206	0.015444	0.131579
-0.10479	-0.100893	-0.0502392	0.0382883	-0.0934959	0.0561224	-0.0912281	-0.0798479	-0.0077519
-0.0234114	-0.129096	-0.0554156	-0.0303688	-0.0627803	-0.0289855	-0.011583	-0.0785124	-0.140625
-0.284247	-0.106043	-0.215333	-0.0469799	-0.330144	-0.0129353	-0.185547	-0.134529	-0.30303
-0.0861244	0.0293367	0.0118946	-0.0892019	0.0857143	0.00604839	0.0935252	0.0880829	0.0304348
0.078534	0.00371747	-0.0755668	-0.0103093	-0.00657895	-0.0931864	0.0548246	0.0619048	-0.092827
-0.126214	0.111111	0.1099	0.0572917	0.0264901	0.00883978	0.191268	0.0896861	0.0372093
-0.0944444	-0.0222222	-0.0515548	-0.00246305	0.0580645	0.00328587	-0.0471204	-0.0699588	0.0044843
-0.153374	-0.1	-0.144953	-0.180247	-0.45122	-0.19869	-0.250916	-0.10177	-0.053571
-0.173913	-0.0555556	-0.0262361	0.060241	0.155556	-0.111717	-0.0757946	-0.0935961	-0.094339
0.0350877	0.026738	-0.0860104	-0.0142045	-0.00961538	-0.0276074	-0.037037	0.103261	0.015625
-0.0338983	-0.101562	-0.0192744	-0.152738	-0.0291262	0.104101	-0.162088	-0.0935961	-0.153846
-0.201754	-0.00434783	-0.132948	-0.085034	-0.27	-0.14	-0.167213	-0.0869565	-0.254545
-0.120879	-0.0436681	-0.229333	-0.0111524	-0.136986	-0.0199336	-0.0748031	-0.136905	-0.154472
0.0125	-0.0258752	0.157439	0.0112782	-0.047619	-0.0932203	0.	0.0689655	-0.038461
-0.0123457	-0.00625	-0.22272	0.0334572	-0.0833333	-0.0336449	0.0382979	-0.0451613	0.12
-0.2	-0.0566038	-0.107692	-0.0971223	-0.236364	-0.098646	-0.0901639	-0.0135135	-0.0089285
-0.03125	0.0583333	-0.368534	0.0398406	0.119048	0.11588	0.135135	-0.0136986	0.342342
0.145161	-1.11022×10^{-16}	0.269625	0.0574713	0.638298	-0.00384615	0.305556	0.125	0.261745
0.0704225	-0.0141732	0.0752688	0.0289855	0.272727	0.00579151	-0.0151976	0.037037	0.0053191
-0.0526316	-0.0750799	-0.04	-0.0176056	-0.0306122	-0.0172745	-0.00308642	0.0416667	-0.068783
0.0416667	0.110535	0.140625	-0.00358423	-0.0105263	0.134766	-0.0743034	-0.0171429	0.0454545
0.213333	0.0808709	0.0479452	0.0863309	0.117021	0.0636833	0.140468	0.104651	-0.0054347
0.10989	0.11223	0.0566449	0.0364238	0.047619	0.0889968	0.11437	0.105263	0.114754
-0.039604	-0.0271669	0.0350515	-0.0383387	-0.0272727	-0.00297177	0.0631579	-0.0857143	-0.044117
-0.0927835	-0.0212766	-0.0717131	0.013289	-0.0280374	-0.00596125	-0.0544554	-0.015625	-0.087179
-0.0340909	0.0543478	-0.0193133	0.0196721	0.00961538	0.0764618	0.0314136	0.047619	0.0842697
-0.0705882	-0.0193299	-0.0787746	-0.0771704	-0.104762	-0.0431755	-0.162437	-0.0353535	-0.056994
-0.0632911	-0.0709593	-0.130641	-0.0627178	-0.106383	-0.142649	-0.0454545	-0.0366492	-0.126374
0.108108	0.110325	0.0928962	0.0929368	0.261905	0.0662139	0.0285714	0.146739	0.0062893
-0.146341	-0.0318471	-0.1	-0.085034	-0.150943	-0.154459	-0.16358	-0.042654	-0.18125
-0.0142857	0.00526316	-0.0277778	0.00743494	0.0666667	0.00564972	-0.00738007	0.0049505	0.0076335

```
MatrixForm[Correlation[TabRetornos]]
```

1.	0.536943	0.501863	0.504386	0.693002	0.481457	0.634432	0.685172	0.568424	0.291741
0.536943	1.	0.329862	0.482692	0.452211	0.482051	0.575146	0.6985	0.549704	0.398151
0.501863	0.329862	1.	0.358602	0.554839	0.254522	0.434221	0.573287	0.21797	0.219641
0.504386	0.482692	0.358602	1.	0.624471	0.486734	0.649065	0.474597	0.491444	0.614233
0.693002	0.452211	0.554839	0.624471	1.	0.463714	0.75793	0.629351	0.647732	0.458374
0.481457	0.482051	0.254522	0.486734	0.463714	1.	0.43694	0.307819	0.508416	0.472373
0.634432	0.575146	0.434221	0.649065	0.75793	0.43694	1.	0.697902	0.721713	0.496363
0.685172	0.6985	0.573287	0.474597	0.629351	0.307819	0.697902	1.	0.559298	0.26979
0.568424	0.549704	0.21797	0.491444	0.647732	0.508416	0.721713	0.559298	1.	0.407846
0.291741	0.398151	0.219641	0.614233	0.458374	0.472373	0.496363	0.26979	0.407846	1.

```
MatrixForm[Covariance[TabRetornos]]
```

0.0125424	0.00396516	0.00682211	0.00360216	0.0150592	0.00425299	0.008174	0.00604673	0.0081475	0.003155
0.00396516	0.00434796	0.0026401	0.00202966	0.00578576	0.00250716	0.00436296	0.00362945	0.0046391	0.002535
0.00682211	0.0026401	0.0147329	0.00277567	0.0130674	0.00243678	0.00606338	0.00548338	0.00338613	0.002575
0.00360216	0.00202966	0.00277567	0.0040665	0.00772679	0.00244821	0.00476166	0.00238488	0.00401095	0.003783
0.0150592	0.00578576	0.0130674	0.00772679	0.0376489	0.00709698	0.0169186	0.00962279	0.0160855	0.00859
0.00425299	0.00250716	0.00243678	0.00244821	0.00709698	0.00622148	0.00396486	0.00191326	0.00513249	0.003598
0.008174	0.00436296	0.00606338	0.00476166	0.0169186	0.00396486	0.0132349	0.00632682	0.0106264	0.005515
0.00604673	0.00362945	0.00548338	0.00238488	0.00962279	0.00191326	0.00632682	0.00620959	0.00564076	0.002053
0.0081475	0.0046391	0.00338613	0.00401095	0.0160855	0.00513249	0.0106264	0.00564076	0.0163804	0.005041
0.00315587	0.00253585	0.00257508	0.00378335	0.0085907	0.00359885	0.00551558	0.00205347	0.00504186	0.009329

```
SymmetricQ[Covariance[TabRetornos]]
```

```
True
```

Cálculo do V@R da carteira e do valor máximo

```
VaRMedioCarteira = - (Dot[Dot[VectorVARSMedio, Correlation[TabRetornos]], VectorVARSMedio]) ^0.5
```

```
-0.13238
```

- **Valor máximo do V@R com os dados inciais**

```
Sum[VectorVARSMedio[[i]], {i, 1, 10}]
```

```
-0.173904
```

```
Sum[VectorVARSZero[[i]], {i, 1, 10}]
```

```
-0.196967
```

Construção das Perturbações I

```
Needs["Combinatorica`"]
```

- **Fixação das variâncias das perturbações condicionadas pela distribuição e pelos V@Rs (paper de 20110209)**

```
deltaUm = 10^(-1); deltaDois = 10^(-1); NivSig = 0.05;
```

```
phiMinusOne[alfa_] := (2^0.5) * InverseErf[2 * alfa - 1]
```

```
tabVarPER = Table[Min[((2 * deltaUm * StandardDeviation[RetornosM[i]]) / (Abs[phiMinusOne[NivSig]]) +
      (deltaUm^2 / phiMinusOne[NivSig]^2)), Variance[RetornosM[i]] * (E^(deltaDois * Pi) - 1) ], {i, 1, 10}]
```

```
{0.00462948, 0.00160487, 0.00543804, 0.00150098,
 0.0138965, 0.0022964, 0.00488509, 0.00229201, 0.00604614, 0.00344364}
```

- **Construção do limite Cauchy - Schwartz para a matriz das correlações dos dados perturbados**

```
FunlimitesCorrPER[i_, j_] := If[i == j, 1, 0] +
   If[Or[ i > j, i < j], (((tabVarPER[[i]]^0.5) * (tabVarPER[[j]]^0.5)) + Covariance[TabRetornos][[i]][[j]]) /
     (((Variance[RetornosM[i]] + tabVarPER[[i]])^0.5) * ((Variance[RetornosM[j]] + tabVarPER[[j]])^0.5)), 0];
limitesCoorPER = Table[FunlimitesCorrPER[i, j], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}]; MatrixForm[limitesCoorPER]
```

1	0.661782	0.636159	0.638002	0.775768	0.621255	0.732988	0.770049	0.684776	0.482685
0.661782	1	0.51053	0.622157	0.599894	0.621689	0.689686	0.779784	0.671102	0.560408
0.636159	0.51053	1	0.531521	0.674854	0.455501	0.586753	0.688328	0.428803	0.430024
0.638002	0.622157	0.531521	1	0.725713	0.625109	0.743676	0.616244	0.628549	0.718235
0.775768	0.599894	0.674854	0.725713	1	0.608296	0.823191	0.729277	0.742702	0.604395
0.621255	0.621689	0.455501	0.625109	0.608296	1	0.588739	0.494429	0.640945	0.61462
0.732988	0.689686	0.586753	0.743676	0.823191	0.588739	1	0.779347	0.796738	0.632142
0.770049	0.779784	0.688328	0.616244	0.729277	0.494429	0.779347	1	0.67811	0.466652
0.684776	0.671102	0.428803	0.628549	0.742702	0.640945	0.796738	0.67811	1	0.567489
0.482685	0.560408	0.430024	0.718235	0.604395	0.61462	0.632142	0.466652	0.567489	1

```
PositiveDefiniteMatrixQ[limitesCoorPER]
```

```
True
```

```
MatrixForm[Correlation[TabRetornos]]
```

1.	0.536943	0.501863	0.504386	0.693002	0.481457	0.634432	0.685172	0.568424	0.291741
0.536943	1.	0.329862	0.482692	0.452211	0.482051	0.575146	0.6985	0.549704	0.398151
0.501863	0.329862	1.	0.358602	0.554839	0.254522	0.434221	0.573287	0.21797	0.219641
0.504386	0.482692	0.358602	1.	0.624471	0.486734	0.649065	0.474597	0.491444	0.614233
0.693002	0.452211	0.554839	0.624471	1.	0.463714	0.75793	0.629351	0.647732	0.458374
0.481457	0.482051	0.254522	0.486734	0.463714	1.	0.43694	0.307819	0.508416	0.472373
0.634432	0.575146	0.434221	0.649065	0.75793	0.43694	1.	0.697902	0.721713	0.496363
0.685172	0.6985	0.573287	0.474597	0.629351	0.307819	0.697902	1.	0.559298	0.26979
0.568424	0.549704	0.21797	0.491444	0.647732	0.508416	0.721713	0.559298	1.	0.407846
0.291741	0.398151	0.219641	0.614233	0.458374	0.472373	0.496363	0.26979	0.407846	1.

- **Cálculo do V@R médio da carteira directamente com a matriz de correlações limite (fórmula 15 do paper de 20110209). Este resultado é um exemplo fundamental do resultado teórico do paper, sem as simulações; só se fixaram as variâncias das perturbações iniciais.**

```
VarMedioActivoPERpuro[n_Integer, q_] :=
  (Quantile[NormalDistribution[Mean[RetornosM[n]], (StandardDeviation[RetornosM[n]]^2 + tabVarPER[[n]])^0.5],
      q] - Mean[RetornosM[n]]) * MontanteCarteira * PesosCarteira[[n]]
VectorVARSMedioPERpuro = Table[VarMedioActivoPERpuro[i, 0.05], {i, 1, 10}]
```

```
{-0.034487, -0.0095181, -0.0256971, -0.00613658,
 -0.0280081, -0.0136627, -0.0276768, -0.0212327, -0.0184744, -0.01859}
```

```
VaRMedioCarteira = -(Dot[Dot[VectorVARSMedioPERpuro, limitesCoorPER], VectorVARSMedioPERpuro])^0.5
```

```
-0.169373
```

- **Construção de uma matriz de variância - covariância das perturbações com o condicionamento de Cauchy - Schwartz e com as variâncias das perturbações iniciais acima.**

```
FuncMatrizVarCovarPERpar[i_, j_] := If[i < j,
   Random[Real, {(tabVarPER[[i]] * tabVarPER[[j]])^0.5 - 0.0003, (tabVarPER[[i]] * tabVarPER[[j]])^0.5}], 0];
MatrizVarCovarNovaPERpar = Table[FuncMatrizVarCovarPERpar[i, j], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}];
MatrixForm[MatrizVarCovarNovaPERpar]
```

0	0.00269819	0.00489282	0.00238202	0.00780643	0.00320457	0.00471938	0.00320849	0.00507301	0.00391646
0	0	0.00267181	0.00150737	0.00443482	0.00173657	0.00263773	0.00165406	0.00294818	0.00206485
0	0	0	0.00281263	0.00851372	0.00331193	0.004936	0.00336153	0.00547162	0.00429757
0	0	0	0	0.0043765	0.00181233	0.00269945	0.00173933	0.00287787	0.00226546
0	0	0	0	0	0.00538961	0.00804141	0.00558536	0.0091406	0.00670293
0	0	0	0	0	0	0.00313916	0.00211907	0.00356277	0.00256119
0	0	0	0	0	0	0	0.00330278	0.00524559	0.00398249
0	0	0	0	0	0	0	0	0.00365105	0.00268796
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00429202
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

```
MatrizVarCovarNovaPER = MatrizVarCovarNovaPERpar + DiagonalMatrix[Table[tabVarPER[[i]], {i, 1, 10}]] +
  Transpose[MatrizVarCovarNovaPERpar]; MatrixForm[MatrizVarCovarNovaPER]
```

0.00462948	0.00269819	0.00489282	0.00238202	0.00780643	0.00320457	0.00471938	0.00320849	0.00507301	0.003916
0.00269819	0.00160487	0.00267181	0.00150737	0.00443482	0.00173657	0.00263773	0.00165406	0.00294818	0.002064
0.00489282	0.00267181	0.00543804	0.00281263	0.00851372	0.00331193	0.004936	0.00336153	0.00547162	0.004297
0.00238202	0.00150737	0.00281263	0.00150098	0.0043765	0.00181233	0.00269945	0.00173933	0.00287787	0.002265
0.00780643	0.00443482	0.00851372	0.0043765	0.0138965	0.00538961	0.00804141	0.00558536	0.0091406	0.006702
0.00320457	0.00173657	0.00331193	0.00181233	0.00538961	0.0022964	0.00313916	0.00211907	0.00356277	0.002561
0.00471938	0.00263773	0.004936	0.00269945	0.00804141	0.00313916	0.00488509	0.00330278	0.00524559	0.003982
0.00320849	0.00165406	0.00336153	0.00173933	0.00558536	0.00211907	0.00330278	0.00229201	0.00365105	0.002687
0.00507301	0.00294818	0.00547162	0.00287787	0.0091406	0.00356277	0.00524559	0.00365105	0.00604614	0.004292
0.00391646	0.00206485	0.00429757	0.00226546	0.00670293	0.00256119	0.00398249	0.00268796	0.00429202	0.003443

```
{SymmetricQ[MatrizVarCovarNovaPER], PositiveDefiniteMatrixQ[MatrizVarCovarNovaPER]}
```

```
{True, False}
```

- **Correcção da matriz de variância - covariância "magic powder" do Rebonato modificado**

```
Posit[x_] := If[x < 0, -x, x]
```

```
ValorProPOSCov = Table[Posit[Chop[Eigenvalues[MatrizVarCovarNovaPER][[i]]]],
   {i, 1, Length[Eigenvalues[MatrizVarCovarNovaPER]]}]
```

$\{0.0448077, 0.00050426, 0.000415223, 0.000303687, 0.00028229, 0.000233239, 0.000180954, 0.0000634172, 0.000025207, 1.78696 \times 10^{-6}\}$

```
TesCov = Table[tabVarPER[[i]] / ((Transpose[Eigenvectors[MatrizVarCovarNovaPER]][[i]]^2).ValorProPOSCov),
   {i, 1, Length[Eigenvalues[MatrizVarCovarNovaPER]]}]
```

{0.960833, 0.935864, 0.996371, 0.895844, 0.997779, 0.976867, 0.989647, 0.964285, 0.995456, 0.987753}

```
BprimeCov = Transpose[Eigenvectors[MatrizVarCovarNovaPER]].DiagonalMatrix[ValorProPOSCov^0.5];
MatrixForm[BprimeCov]
```

-0.067322	-0.00225056	0.0106132	-0.00969929	-0.00656106	0.0053549	-0.00146573	0.000108143	-0.0
-0.037942	0.00451759	0.0112868	0.00693061	0.00454831	-0.0023943	-0.00678544	0.00263753	0.000
-0.0725748	-0.0106999	-0.00396954	0.00243061	0.00429083	0.00496467	-0.0026624	-0.000898176	-0.0
-0.0378537	-0.00475183	0.000684772	-0.00887941	0.00854574	-0.00681842	0.0035718	0.00289717	-0.00
-0.117507	0.00641668	-0.00740159	-0.00228643	0.000162184	0.00120565	-0.002576	0.000043505	0.00
-0.0461419	0.00274108	0.00594925	0.00516515	0.00464916	0.00652781	0.00934737	-0.0000245386	0.000
-0.069028	-0.00277208	0.00536525	0.00306314	-0.00467789	-0.00892376	0.00277102	-0.00401056	0.000
-0.0471755	0.00172993	-0.00407137	0.0037184	-0.00875384	-0.00147049	0.00324142	0.00520824	-0.0
-0.0768514	0.0113929	-0.00404394	-0.000903784	0.00247008	-0.00114802	-0.000135604	-0.0019581	-0.0
-0.0574662	-0.0123513	-0.00265977	0.00457086	-0.000927496	-0.00071617	-0.000839335	0.000449045	0.000

```
BeeCov = DiagonalMatrix[(TesCov^0.5)].BprimeCov; MatrixForm[BeeCov]
```

-0.0659904	-0.00220605	0.0104033	-0.00950745	-0.00643128	0.00524898	-0.00143674	0.000106004	-0.0
-0.0367051	0.00437032	0.0109188	0.00670468	0.00440004	-0.00231625	-0.00656424	0.00255155	0.00
-0.072443	-0.0106804	-0.00396233	0.00242619	0.00428304	0.00495566	-0.00265756	-0.000896544	-0.
-0.0358282	-0.00449756	0.00064813	-0.00840427	0.00808846	-0.00645357	0.00338068	0.00274214	-0.0
-0.117376	0.00640955	-0.00739337	-0.00228389	0.000162004	0.00120431	-0.00257314	0.0000434566	0.0
-0.0456051	0.00270919	0.00588003	0.00510506	0.00459507	0.00645186	0.00923862	-0.0000242531	0.0
-0.0686698	-0.0027577	0.0053374	0.00304724	-0.00465361	-0.00887744	0.00275664	-0.00398974	0.0
-0.0463254	0.00169876	-0.00399801	0.0036514	-0.0085961	-0.00144399	0.00318301	0.00511439	-0.
-0.0766766	0.011367	-0.00403474	-0.000901728	0.00246447	-0.00114541	-0.000135296	-0.00195364	-0.
-0.0571132	-0.0122755	-0.00264343	0.00454278	-0.000921799	-0.000711771	-0.000834179	0.000446286	0.0

```
MatVarCovarAproxRebonato = BeeCov.Transpose[BeeCov]; MatrixForm[MatVarCovarAproxRebonato]
```

0.00462948	0.00243161	0.00474283	0.00237048	0.00768371	0.00300684	0.00454294	0.00302123	0.00498116	0.0037
0.00243161	0.00160487	0.00260782	0.00128149	0.00425536	0.00172881	0.00255902	0.00164626	0.00282326	0.002
0.00474283	0.00260782	0.00543804	0.00261205	0.00846626	0.00328975	0.00492237	0.00330779	0.00545914	0.0042
0.00237048	0.00128149	0.00261205	0.00150098	0.00417551	0.00160927	0.00246857	0.00158358	0.00272291	0.0020
0.00768371	0.00425536	0.00846626	0.00417551	0.0138965	0.00530218	0.00797838	0.00545472	0.00909434	0.0066
0.00300684	0.00172881	0.00328975	0.00160927	0.00530218	0.0022964	0.00311825	0.00209201	0.00349994	0.0025
0.00454294	0.00255902	0.00492237	0.00246857	0.00797838	0.00311825	0.00488509	0.00320718	0.00521483	0.003
0.00302123	0.00164626	0.00330779	0.00158358	0.00545472	0.00209201	0.00320718	0.00229201	0.00355778	0.0026
0.00498116	0.00282326	0.00545914	0.00272291	0.00909434	0.00349994	0.00521483	0.00355778	0.00604614	0.0042
0.00372861	0.0020485	0.00428287	0.00205702	0.00663685	0.00256291	0.0039619	0.00265984	0.00424298	0.0034

- **Conjectura sobre a norma da diferença das matrizes de var-covar construída e alterada**

```
Norm[Eigenvalues[MatVarCovarAproxRebonato] - Eigenvalues[MatrizVarCovarNovaPER]]
```

0.00093739

```
Norm[MatVarCovarAproxRebonato - MatrizVarCovarNovaPER]
```

0.000966904

```
MatrixForm[MatrizVarCovarNovaPER]
```

0.00462948	0.00269819	0.00489282	0.00238202	0.00780643	0.00320457	0.00471938	0.00320849	0.00507301	0.003916
0.00269819	0.00160487	0.00267181	0.00150737	0.00443482	0.00173657	0.00263773	0.00165406	0.00294818	0.002064
0.00489282	0.00267181	0.00543804	0.00281263	0.00851372	0.00331193	0.004936	0.00336153	0.00547162	0.004297
0.00238202	0.00150737	0.00281263	0.00150098	0.0043765	0.00181233	0.00269945	0.00173933	0.00287787	0.002265
0.00780643	0.00443482	0.00851372	0.0043765	0.0138965	0.00538961	0.00804141	0.00558536	0.0091406	0.006702
0.00320457	0.00173657	0.00331193	0.00181233	0.00538961	0.0022964	0.00313916	0.00211907	0.00356277	0.002561
0.00471938	0.00263773	0.004936	0.00269945	0.00804141	0.00313916	0.00488509	0.00330278	0.00524559	0.003982
0.00320849	0.00165406	0.00336153	0.00173933	0.00558536	0.00211907	0.00330278	0.00229201	0.00365105	0.002687
0.00507301	0.00294818	0.00547162	0.00287787	0.0091406	0.00356277	0.00524559	0.00365105	0.00604614	0.004292
0.00391646	0.00206485	0.00429757	0.00226546	0.00670293	0.00256119	0.00398249	0.00268796	0.00429202	0.003443

```
{SymmetricQ[MatVarCovarAproxRebonato], PositiveDefiniteMatrixQ[MatVarCovarAproxRebonato]}
```

{True, True}

```
MatrixForm[Chop[MatrizVarCovarNovaPER - MatVarCovarAproxRebonato]]
```

0	0.00026658	0.000149997	0.0000115344	0.000122721	0.000197726	0.000176441	0.000187259
0.00026658	0	0.0000639902	0.000225883	0.000179466	7.76331×10^{-6}	0.0000787057	7.7973×10^{-6}
0.000149997	0.0000639902	0	0.000200572	0.0000474583	0.0000221814	0.0000136364	0.0000537442
0.0000115344	0.000225883	0.000200572	0	0.000200992	0.00020306	0.000230884	0.000155749
0.000122721	0.000179466	0.0000474583	0.000200992	0	0.0000874271	0.0000630265	0.000130642
0.000197726	7.76331×10^{-6}	0.0000221814	0.00020306	0.0000874271	0	0.0000209069	0.0000270569
0.000176441	0.0000787057	0.0000136364	0.000230884	0.0000630265	0.0000209069	0	0.0000956043
0.000187259	7.7973×10^{-6}	0.0000537442	0.000155749	0.000130642	0.0000270569	0.0000956043	0
0.0000918467	0.000124919	0.0000124739	0.000154962	0.0000462589	0.0000628359	0.0000307602	0.0000932728
0.000187842	0.0000163461	0.0000147021	0.000208436	0.0000660785	-1.72307×10^{-6}	0.0000205883	0.0000281138

Conclusão : Com o procedimento do Rebonato tem - se uma matriz com as variâncias das perturbações como queríamos e pouco diferente da inicial.

Correcção da matriz de variância - covariância só por alteração do sinal dos valores próprios

```
Eigenvalues[MatrizVarCovarNovaPER]
```

{0.0448077, 0.00050426, 0.000415223, -0.000303687, 0.00028229, 0.000233239, 0.000180954, -0.0000634172, -0.000025207, 1.78696×10^{-6}}

```
diagABS = DiagonalMatrix[Abs[Eigensystem[MatrizVarCovarNovaPER][[1]]]]; MatrixForm[diagABS]
```

0.0448077	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
0.	0.00050426	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
0.	0.	0.000415223	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
0.	0.	0.	0.000303687	0.	0.	0.	0.	0.	
0.	0.	0.	0.	0.00028229	0.	0.	0.	0.	
0.	0.	0.	0.	0.	0.000233239	0.	0.	0.	
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.000180954	0.	0.	
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.0000634172	0.	
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.000025207	
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.

```
mudBas = Transpose[Eigensystem[MatrizVarCovarNovaPER][[2]]]; MatrixForm[mudBas]
```

-0.318039	-0.100222	0.52084	-0.556579	-0.390504	0.350631	-0.108961	0.0135799	-0.103405	0.097808
-0.179244	0.201178	0.553896	0.397703	0.270708	-0.156775	-0.504422	0.331203	0.0089258	-0.01877
-0.342854	-0.476487	-0.194805	0.139477	0.255384	0.32508	-0.19792	-0.112787	-0.355718	-0.4986
-0.178827	-0.211609	0.0336051	-0.509531	0.50863	-0.446461	0.265524	0.363806	-0.0273873	-0.02918
-0.55512	0.285748	-0.363232	-0.131203	0.00965297	0.0789441	-0.191497	0.00546305	0.637193	-0.10952
-0.217981	0.122066	0.291958	0.296395	0.276711	0.427432	0.694873	-0.00308139	0.142393	0.045765
-0.326099	-0.123447	0.263299	0.175774	-0.278421	-0.584315	0.205995	-0.503618	0.0583587	-0.24450
-0.222864	0.0770373	-0.199802	0.213375	-0.521015	-0.0962853	0.240963	0.654014	-0.243354	-0.18220
-0.363057	0.507351	-0.198456	-0.0518623	0.147016	-0.075171	-0.0100807	-0.245884	-0.60242	0.34347
-0.271479	-0.550031	-0.130528	0.262292	-0.0552032	-0.0468938	-0.0623952	0.0563879	0.100572	0.71798

```
RECaaVarCovPer = SetAccuracy[Dot[Dot[mudBas, diagABS], Inverse[mudBas]], 16]; MatrixForm[RECaaVarCovPer]
```

0.004818195287139	0.002564271444893	0.0048473348001417	0.002555035657894	0.007847470615497	0.0031036216
0.002564271444893	0.001714851042231	0.002700603289047	0.001399562851032	0.004403644476501	0.0018081013
0.0048473348001417	0.002700603289047	0.005457849061112	0.002764748476403	0.008491099398902	0.0033345259
0.002555035657894	0.001399562851032	0.002764748476403	0.001675489284089	0.004416474225620	0.0017202642
0.007847470615497	0.004403644476501	0.008491099398902	0.004416474225620	0.013927440473636	0.0053705609
0.003103621634478	0.001808101318705	0.003334525908766	0.001720264216881	0.005370560962441	0.0023507764
0.0046587886553691	0.002659055812164	0.004957051127423	0.002621736210523	0.0080289254337707	0.0031714155
0.003138751103007	0.001732965833957	0.003374617798415	0.001703804896163	0.005560991151315	0.0021554783
0.005093255385498	0.002925050767467	0.005481545041017	0.002883406713595	0.009125212141003	0.0035492074
0.003827361881296	0.002130617117024	0.004317178464889	0.002186745125646	0.006685297153936	0.0026091035

```
test = Table[{{i, j}, RECaaVarCovPer[[i]][[j]] - RECaaVarCovPer[[j]][[i]]}, {i, 1, 10}, {j, 1, 10}];
MatrixForm[test]
```

{1, 1} $0.\times 10^{-16}$	{1, 2} $0.\times 10^{-16}$	{1, 3} $0.\times 10^{-16}$	{1, 4} $0.\times 10^{-16}$	{1, 5} $0.\times 10^{-16}$	{1, 6} $0.\times 10^{-16}$	{1, 7} $0.\times 10^{-16}$	{1, 8} $0.\times 10^{-16}$	{1, 9} $0.\times 10^{-16}$
{2, 1} $0.\times 10^{-16}$	{2, 2} $0.\times 10^{-16}$	{2, 3} $0.\times 10^{-16}$	{2, 4} $0.\times 10^{-16}$	{2, 5} $0.\times 10^{-16}$	{2, 6} $0.\times 10^{-16}$	{2, 7} $0.\times 10^{-16}$	{2, 8} $0.\times 10^{-16}$	{2, 9} $0.\times 10^{-16}$
{3, 1} $0.\times 10^{-16}$	{3, 2} $0.\times 10^{-16}$	{3, 3} $0.\times 10^{-16}$	{3, 4} $0.\times 10^{-16}$	{3, 5} $0.\times 10^{-16}$	{3, 6} $0.\times 10^{-16}$	{3, 7} $0.\times 10^{-16}$	{3, 8} $0.\times 10^{-16}$	{3, 9} $0.\times 10^{-16}$
{4, 1} $0.\times 10^{-16}$	{4, 2} $0.\times 10^{-16}$	{4, 3} $0.\times 10^{-16}$	{4, 4} $0.\times 10^{-16}$	{4, 5} $0.\times 10^{-16}$	{4, 6} $0.\times 10^{-16}$	{4, 7} $0.\times 10^{-16}$	{4, 8} $0.\times 10^{-16}$	{4, 9} $0.\times 10^{-16}$
{5, 1} $0.\times 10^{-16}$	{5, 2} $0.\times 10^{-16}$	{5, 3} $0.\times 10^{-16}$	{5, 4} $0.\times 10^{-16}$	{5, 5} $0.\times 10^{-16}$	{5, 6} $0.\times 10^{-16}$	{5, 7} $0.\times 10^{-16}$	{5, 8} $0.\times 10^{-16}$	{5, 9} $0.\times 10^{-16}$
{6, 1} $0.\times 10^{-16}$	{6, 2} $0.\times 10^{-16}$	{6, 3} $0.\times 10^{-16}$	{6, 4} $0.\times 10^{-16}$	{6, 5} $0.\times 10^{-16}$	{6, 6} $0.\times 10^{-16}$	{6, 7} $0.\times 10^{-16}$	{6, 8} $0.\times 10^{-16}$	{6, 9} $0.\times 10^{-16}$
{7, 1} $0.\times 10^{-16}$	{7, 2} $0.\times 10^{-16}$	{7, 3} $0.\times 10^{-16}$	{7, 4} $0.\times 10^{-16}$	{7, 5} $0.\times 10^{-16}$	{7, 6} $0.\times 10^{-16}$	{7, 7} $0.\times 10^{-16}$	{7, 8} $0.\times 10^{-16}$	{7, 9} $0.\times 10^{-16}$
{8, 1} $0.\times 10^{-16}$	{8, 2} $0.\times 10^{-16}$	{8, 3} $0.\times 10^{-16}$	{8, 4} $0.\times 10^{-16}$	{8, 5} $0.\times 10^{-16}$	{8, 6} $0.\times 10^{-16}$	{8, 7} $0.\times 10^{-16}$	{8, 8} $0.\times 10^{-16}$	{8, 9} $0.\times 10^{-16}$
{9, 1} $0.\times 10^{-16}$	{9, 2} $0.\times 10^{-16}$	{9, 3} $0.\times 10^{-16}$	{9, 4} $0.\times 10^{-16}$	{9, 5} $0.\times 10^{-16}$	{9, 6} $0.\times 10^{-16}$	{9, 7} $0.\times 10^{-16}$	{9, 8} $0.\times 10^{-16}$	{9, 9} $0.\times 10^{-16}$
{10, 1} $0.\times 10^{-16}$	{10, 2} $0.\times 10^{-16}$	{10, 3} $0.\times 10^{-16}$	{10, 4} $0.\times 10^{-16}$	{10, 5} $0.\times 10^{-16}$	{10, 6} $0.\times 10^{-16}$	{10, 7} $0.\times 10^{-16}$	{10, 8} $0.\times 10^{-16}$	{10, 9} $0.\times 10^{-16}$

```
PositiveDefiniteMatrixQ[RECaaVarCovPer]
```

True

Cálculo do V@R Perturbado com a matriz de var-covar das perturbações alterada pela variante de Rebonato

Simulação das Perturbações

```
Needs["MultivariateStatistics`"]
```

```
mediaPER = Table[0, {i, 1, 10}];
```

```
a = Length[Dados[1]]
```

37

```
PER = RandomReal[MultinormalDistribution[mediaPER, MatVarCovarAproxRebonato], a - 1]; MatrixForm[PER]
```

0.0589988	0.0823249	0.0987925	0.0506324	0.140336	0.0655326	0.101227	0.0372234	0.105496
-0.0468552	-0.0277107	-0.0330679	-0.00743716	-0.0640907	-0.0436789	-0.0316753	-0.0282738	-0.049652
0.0135543	-0.00260015	0.0235519	0.010463	0.0109581	-0.00283957	-0.00836218	-0.0165673	-0.0009746
-0.0209398	-0.0118456	0.0297837	0.033933	-0.0236	-0.00445799	0.00947472	-0.0257178	-0.03357
-0.0376222	-0.0462223	-0.0382023	-0.0193924	-0.0504427	-0.0279506	-0.029917	0.000400875	-0.03415
0.0651259	0.0336273	0.0761922	0.0289244	0.132093	0.0306004	0.0897954	0.0636057	0.084911
-0.0370862	-0.0104098	-0.0172374	-0.00831417	-0.0422331	-0.00385062	-0.00834306	-0.0118468	-0.02807
0.0137273	0.00108481	0.0212494	-0.0164548	0.00644684	0.00620036	0.0112071	0.021269	-0.002499
0.00743795	0.0135219	0.0360429	0.0326667	0.0264142	0.0313504	0.0526142	0.0247516	0.011777
-0.00774128	-0.00987473	0.0320511	0.00497831	-0.00910356	0.00480724	-0.021936	-0.00849162	-0.007388
0.0282858	0.0336344	0.0620021	0.0561564	0.110463	0.0299585	0.0613253	0.0433685	0.077326
0.0909898	0.0801153	0.0916436	0.0554699	0.185633	0.0457728	0.088757	0.055225	0.128211
-0.0736077	-0.0515126	-0.112249	-0.0275668	-0.141827	-0.0790901	-0.078894	-0.0509602	-0.096627
-0.123917	-0.076002	-0.138417	-0.0698869	-0.254364	-0.0639821	-0.129072	-0.098729	-0.16706
-0.0370225	-0.00318027	-0.0165245	-0.00361509	-0.0221044	0.0175723	-0.0355364	-0.0043058	-0.009872
0.00692294	0.0304282	0.0151908	0.0239386	0.0789244	0.0250743	0.0386039	0.0149149	0.083892
-0.00539075	-0.0246003	-0.0447115	-0.0203734	-0.0785639	-0.0126677	-0.0411363	-0.0276627	-0.063936
-0.068202	-0.0650374	-0.0774057	-0.0669042	-0.102273	-0.0650269	-0.0600375	-0.0185769	-0.063007
0.0267027	0.00359976	0.032426	0.0275259	0.071733	0.0363486	0.0763698	0.0551412	0.050379
-0.0136732	0.0249213	-0.0282438	-0.0145501	-0.0228836	0.00424337	0.0220011	0.00649626	-0.017979
0.0371714	0.0420522	0.058169	0.0441279	0.0649791	0.0312558	0.0384163	0.0192865	0.046591
0.0617208	0.0644083	0.058529	0.0192377	0.12251	0.0683741	0.0772817	0.0483353	0.104352
0.0750342	0.0692969	0.0760569	0.0282473	0.107673	0.0338431	0.0949441	0.0473867	0.058887
0.0463494	0.0195084	0.0690821	0.00948386	0.11065	0.046057	0.0553609	0.0705085	0.065308
0.0443483	0.0295919	0.0373973	0.043089	0.086113	0.0553617	0.0489195	0.0172954	0.065951
-0.0316587	-0.0375608	-0.0233431	0.0193525	-0.0211456	-0.0409272	-0.0338188	-0.0154204	-0.01254
-0.150867	-0.0776161	-0.15211	-0.0837851	-0.217406	-0.0954465	-0.137753	-0.0615139	-0.13548
0.0131622	0.0492132	0.0546828	-0.00497907	0.098142	0.0129303	0.0397679	0.0280731	0.085795
-0.0128027	-0.00590159	-0.00745632	0.00155929	0.0324153	0.00854527	0.0180081	0.0296491	0.024023
0.0497071	0.0235661	0.0649703	0.0119134	0.0973033	0.0373954	0.0588466	0.0566859	0.081936
0.101034	0.0333608	0.0891141	0.0457782	0.129131	0.0551043	0.0739437	0.0554428	0.079666
-0.0229751	0.0176598	-0.0300859	0.0199406	-0.0141214	0.00378346	0.00106288	-0.020913	0.0058345
-0.0269277	-0.0478498	-0.0457777	-0.0204619	-0.088733	-0.0247711	-0.0603947	-0.0441851	-0.062916
-0.0819592	-0.0490506	-0.102647	-0.0581612	-0.11525	-0.056438	-0.069935	-0.0290204	-0.080488
-0.0552543	-0.0623355	-0.0352671	-0.0523422	-0.0885157	-0.0499039	-0.07377	-0.0291454	-0.068342
0.0709145	0.0345985	0.0517034	0.0566505	0.0760164	0.0580537	0.0812121	0.0504682	0.049851

```
TabRetornosPER = Table[PER[[i]][[j]] + TabRetornos[[i]][[j]], {i, 1, a - 1}, {j, 1, 10}];
MatrixForm[TabRetornosPER]
```

0.157142	0.139377	0.0664965	0.0175354	0.120966	0.0715993	0.10547	0.0576316	0.109594
-0.138643	-0.0584454	0.0112282	0.0121227	-0.175202	-0.0376488	-0.116182	-0.00160712	-0.0843464
-0.0742116	-0.0505507	-0.0537288	-0.0231101	-0.169597	-0.0607816	-0.132978	-0.0977362	-0.155309
-0.172543	-0.0833322	0.0310431	0.0513027	-0.332075	-0.0288482	-0.0502792	-0.110523	-0.178574
0.110144	-0.0663448	0.01337	0.0635344	0.15544	0.0372667	0.0355036	0.0158449	0.09742
-0.0396646	-0.0672656	0.025953	0.0672127	0.0385972	0.0867229	-0.00143267	-0.0162422	0.0771591
-0.0604976	-0.139506	-0.072653	-0.0386829	-0.105013	-0.0328361	-0.0199261	-0.0903592	-0.168696
-0.270519	-0.104959	-0.194084	-0.0634347	-0.323697	-0.00673496	-0.17434	-0.11326	-0.30553
-0.0786865	0.0428587	0.0479375	-0.0565352	0.112129	0.0373988	0.146139	0.112834	0.0422122
0.0707928	-0.00615726	-0.0435157	-0.00533097	-0.0156825	-0.0883791	0.0328886	0.0534131	-0.100215
-0.0979278	0.144746	0.171902	0.113448	0.136953	0.0387983	0.252594	0.133055	0.114536
-0.00345469	0.0578931	0.0400888	0.0530069	0.243698	0.0490587	0.0416366	-0.0147339	0.132696
-0.226982	-0.151513	-0.257201	-0.207814	-0.593046	-0.27778	-0.32981	-0.15273	-0.150199
-0.29783	-0.131558	-0.164653	-0.00964597	-0.0988082	-0.175699	-0.204866	-0.192325	-0.261401
-0.00193482	0.0235577	-0.102535	-0.0178196	-0.0317198	-0.010035	-0.0725734	0.0989551	0.00575228
-0.0269754	-0.0711343	-0.00408359	-0.128799	0.0497982	0.129175	-0.123484	-0.0786811	-0.0699539
-0.207145	-0.0289481	-0.177659	-0.105407	-0.348564	-0.152668	-0.208349	-0.114619	-0.318482
-0.189081	-0.108706	-0.306739	-0.0780566	-0.23926	-0.0849605	-0.134841	-0.155482	-0.217479
0.0392027	-0.0222754	0.189865	0.0388041	0.0241139	-0.0568718	0.0763698	0.124107	0.0119181
-0.0260189	0.0186713	-0.250964	0.0189071	-0.106217	-0.0294015	0.0602989	-0.038665	0.10202
-0.162829	-0.0145516	-0.0495233	-0.0529944	-0.171385	-0.0673903	-0.0517476	0.00577302	0.0376626
0.0304708	0.122742	-0.310005	0.0590784	0.241557	0.184254	0.212417	0.0346367	0.446694
0.220195	0.0692969	0.345681	0.0857186	0.745971	0.029997	0.4005	0.172387	0.320633
0.116772	0.00533515	0.144351	0.0384694	0.383378	0.0518485	0.0401633	0.107546	0.0706273
-0.00828331	-0.045488	-0.0026027	0.0254834	0.0555008	0.0380872	0.0458331	0.058962	-0.0028312
0.0100079	0.0729746	0.117282	0.0157682	-0.0316719	0.0938384	-0.108122	-0.0325633	0.0329142
0.0624664	0.00325482	-0.104165	0.00254579	-0.100385	-0.0317632	0.00271566	0.0431373	-0.14092
0.123052	0.161443	0.111328	0.0314448	0.145761	0.101927	0.154137	0.133336	0.20055
-0.0524067	-0.0330685	0.0275952	-0.0367794	0.00514253	0.0055735	0.081166	-0.0560652	-0.0200945
-0.0430764	0.00228949	-0.00674286	0.0252024	0.0692659	0.0314341	0.00439119	0.0410609	-0.00524352
0.0669431	0.0877086	0.0698008	0.0654503	0.138747	0.131566	0.105357	0.103062	0.163937
-0.0935634	-0.00167009	-0.108861	-0.0572298	-0.118883	-0.039392	-0.161374	-0.0562665	-0.0511603
-0.0902188	-0.118809	-0.176419	-0.0831797	-0.195116	-0.16742	-0.105849	-0.0808343	-0.18929
0.0261489	0.0612747	-0.00975059	0.0347756	0.146655	0.00977588	-0.0413636	0.117719	-0.0741991
-0.201596	-0.0941826	-0.135267	-0.137376	-0.239459	-0.204363	-0.23735	-0.0717994	-0.249593
0.0566288	0.0398617	0.0239256	0.0640854	0.142683	0.0637035	0.073832	0.0554187	0.0574855

Cálculo dos V@Rs perturbados individuais e os da carteira

```
RetornosMPER[n_Integer] := Transpose[TabRetornosPER][[n]]

VarMedioActivoPER[n_Integer, q_] :=
 (Quantile[NormalDistribution[Mean[RetornosMPER[n]], StandardDeviation[RetornosMPER[n]]], q] -
    Mean[RetornosMPER[n]]) * MontanteCarteira * PesosCarteira[[n]]

VectorVARSMedioPER = Table[VarMedioActivoPER[i, 0.05], {i, 1, 10}]
```

```
{-0.0324251, -0.0103149, -0.0260648, -0.00576877,
 -0.0292606, -0.0147531, -0.0304663, -0.0221745, -0.0208776, -0.0185418}
```

```
Sum[VectorVARSMedioPER[[i]], {i, 1, 10}]
```

```
-0.210647
```

```
VaRMedioCarteiraPER = -(Dot[Dot[VectorVARSMedioPER, Correlation[TabRetornosPER]], VectorVARSMedioPER])^0.5
```

```
-0.1766
```

```
VaRMedioCarteiraPER = -(Dot[Dot[VectorVARSMedio, Correlation[TabRetornosPER]], VectorVARSMedio])^0.5
```

```
-0.145609
```

MatrixForm[Correlation[TabRetornosPER]]

1.	0.646336	0.596804	0.597971	0.796384	0.633078	0.729408	0.768031	0.722478	0.426079
0.646336	1.	0.466989	0.600844	0.637982	0.662165	0.711153	0.755636	0.754371	0.555876
0.596804	0.466989	1.	0.581438	0.67194	0.455265	0.60873	0.675017	0.447876	0.436482
0.597971	0.600844	0.581438	1.	0.694264	0.650629	0.749498	0.631546	0.645986	0.704835
0.796384	0.637982	0.67194	0.694264	1.	0.683248	0.8319	0.75052	0.77581	0.593041
0.633078	0.662165	0.455265	0.650629	0.683248	1.	0.657172	0.558982	0.727718	0.628358
0.729408	0.711153	0.60873	0.749498	0.8319	0.657172	1.	0.781193	0.815518	0.667197
0.768031	0.755636	0.675017	0.631546	0.75052	0.558982	0.781193	1.	0.697029	0.457917
0.722478	0.754371	0.447876	0.645986	0.77581	0.727718	0.815518	0.697029	1.	0.578624
0.426079	0.555876	0.436482	0.704835	0.593041	0.628358	0.667197	0.457917	0.578624	1.

MatrixForm[limitesCoorPER]

1	0.661782	0.636159	0.638002	0.775768	0.621255	0.732988	0.770049	0.684776	0.482685
0.661782	1	0.51053	0.622157	0.599894	0.621689	0.689686	0.779784	0.671102	0.560408
0.636159	0.51053	1	0.531521	0.674854	0.455501	0.586753	0.688328	0.428803	0.430024
0.638002	0.622157	0.531521	1	0.725713	0.625109	0.743676	0.616244	0.628549	0.718235
0.775768	0.599894	0.674854	0.725713	1	0.608296	0.823191	0.729277	0.742702	0.604395
0.621255	0.621689	0.455501	0.625109	0.608296	1	0.588739	0.494429	0.640945	0.61462
0.732988	0.689686	0.586753	0.743676	0.823191	0.588739	1	0.779347	0.796738	0.632142
0.770049	0.779784	0.688328	0.616244	0.729277	0.494429	0.779347	1	0.67811	0.466652
0.684776	0.671102	0.428803	0.628549	0.742702	0.640945	0.796738	0.67811	1	0.567489
0.482685	0.560408	0.430024	0.718235	0.604395	0.61462	0.632142	0.466652	0.567489	1

MatrixForm[Chop[Correlation[TabRetornosPER] - limitesCoorPER]]

0	-0.0154464	-0.0393549	-0.040031	0.0206164	0.011823	-0.00358042	-0.00201789	0.0377021
-0.0154464	0	-0.0435405	-0.0213131	0.0380879	0.0404764	0.0214676	-0.0241473	0.0832691
-0.0393549	-0.0435405	0	0.0499167	-0.0029134	-0.000235442	0.0219765	-0.0133108	0.0190729
-0.040031	-0.0213131	0.0499167	0	-0.0314489	0.0255194	0.00582203	0.0153017	0.0174366
0.0206164	0.0380879	-0.0029134	-0.0314489	0	0.0749526	0.00870901	0.0212431	0.0331079
0.011823	0.0404764	-0.000235442	0.0255194	0.0749526	0	0.0684327	0.064553	0.0867725
-0.00358042	0.0214676	0.0219765	0.00582203	0.00870901	0.0684327	0	0.00184656	0.0187794
-0.00201789	-0.0241473	-0.0133108	0.0153017	0.0212431	0.064553	0.00184656	0	0.0189189
0.0377021	0.0832691	0.0190729	0.0174366	0.0331079	0.0867725	0.0187794	0.0189189	0
-0.0566068	-0.00453243	0.00645812	-0.0134	-0.0113543	0.0137379	0.0350548	-0.00873498	0.0111347

Norm[VectorVARSMedio - VectorVARSMedioPER]

0.0128048

MatrixForm[Correlation[TabRetornos]]

1.	0.536943	0.501863	0.504386	0.693002	0.481457	0.634432	0.685172	0.568424	0.291741
0.536943	1.	0.329862	0.482692	0.452211	0.482051	0.575146	0.6985	0.549704	0.398151
0.501863	0.329862	1.	0.358602	0.554839	0.254522	0.434221	0.573287	0.21797	0.219641
0.504386	0.482692	0.358602	1.	0.624471	0.486734	0.649065	0.474597	0.491444	0.614233
0.693002	0.452211	0.554839	0.624471	1.	0.463714	0.75793	0.629351	0.647732	0.458374
0.481457	0.482051	0.254522	0.486734	0.463714	1.	0.43694	0.307819	0.508416	0.472373
0.634432	0.575146	0.434221	0.649065	0.75793	0.43694	1.	0.697902	0.721713	0.496363
0.685172	0.6985	0.573287	0.474597	0.629351	0.307819	0.697902	1.	0.559298	0.26979
0.568424	0.549704	0.21797	0.491444	0.647732	0.508416	0.721713	0.559298	1.	0.407846
0.291741	0.398151	0.219641	0.614233	0.458374	0.472373	0.496363	0.26979	0.407846	1.

MatrixForm[Chop[Correlation[TabRetornosPER] - Correlation[TabRetornos]]]

0	0.109393	0.0949417	0.0935853	0.103382	0.151621	0.0949756	0.0828588	0.154054	0.134338
0.109393	0	0.137127	0.118152	0.18577	0.180114	0.136007	0.0571363	0.204668	0.157724
0.0949417	0.137127	0	0.222836	0.117101	0.200743	0.174509	0.10173	0.229906	0.216841
0.0935853	0.118152	0.222836	0	0.0697927	0.163894	0.100433	0.156949	0.154542	0.0906016
0.103382	0.18577	0.117101	0.0697927	0	0.219534	0.0739705	0.121169	0.128079	0.134667
0.151621	0.180114	0.200743	0.163894	0.219534	0	0.220232	0.251163	0.219302	0.155985
0.0949756	0.136007	0.174509	0.100433	0.0739705	0.220232	0	0.0832915	0.0938049	0.170834
0.0828588	0.0571363	0.10173	0.156949	0.121169	0.251163	0.0832915	0	0.137731	0.188128
0.154054	0.204668	0.229906	0.154542	0.128079	0.219302	0.0938049	0.137731	0	0.170778
0.134338	0.157724	0.216841	0.0906016	0.134667	0.155985	0.170834	0.188128	0.170778	0

Norm[Correlation[TabRetornosPER] - Correlation[TabRetornos]]

1.3423

Conclusões : na simulação obtem - se um V@R perturbado superior valor maximal do V@R não perturbado (para os V@Rs iniciais, porque, para os V@Rs perturbados o V@R máximo é maior) e a matriz das correlações estimada para os dados perturbados é maior, termo a termo, do que a matriz dos dados iniciais. A matriz de correlação limite é geralmente inferior, termo a termo, à matriz de empírica dos dados perturbados.

Teste de Kolmogorov entre os dados perturbados e a distribuição dos dados (com parâmetros estimados)

NB : Tem que se correr esta secção para activos=1...10;

```
activo = 5;

aa2[t_, j_Integer] := ((-1)^(j)) * E^(-2 * (j^2) * t^2);
Erro[u_, t_] := Ceiling[(Log[u] / (-2 * t^2))^0.5];
K[t_, u_] := Sum[aa2[t, j], {j, -Erro[u, t], Erro[u, t]}]

Uord = Sort[Transpose[TabRetornosPER][[activo]]];

emme = Length[Uord];

CompNOR[x_] := CDF[NormalDistribution[
   Mean[Transpose[TabRetornos][[activo]]], StandardDeviation[Transpose[TabRetornos][[activo]]]], x]

TabComNOR = Table[CompNOR[Uord[[k]]], {k, 1, emme}];

DMais = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - (i / emme)], {i, 1, emme}];

DMenos = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - ((i - 1) / emme)], {i, 1, emme}];

EstD = Max[Union[DMais, DMenos]]

0.0876752

pVal = 1 - K[EstD, 10^(-10)]

1.

K[1.3581, 10^(-10)]

0.95

ValorCritico1 = 1.3581 / emme^0.5

0.22635

If[EstD > ValorCritico1, 1, 2]
(*  1="Conclusão: Rejeitamos a hipótese de que a amostra provem da distribuição
   dos dados ao nível de significância 0.05",
2="Conclusão: Não rejeitamos a hipotese de que a amostra provem da
   distribuição dos dados ao nível de significância 0.05"  *)

2

K[1.627626, 10^(-10)]

0.99

ValorCritico2 = 1.6276 / emme^0.5

0.271267

If[EstD > ValorCritico2, 1, 2]
(*  1="Conclusão: Rejeitamos a hipótese de que a amostra provem da distribuição
   dos dados ao nível de significância 0.01",
2="Conclusão: Não rejeitamos a hipotese de que a amostra provem da
   distribuição dos dados ao nível de significância 0.01"  *)

2
```

```
UU = {};
For[activo = 1, activo ≤ 10, activo++, Uord = Sort[Transpose[TabRetornosPER][[activo]]];
 emme = Length[Uord]; CompNOR[x_] := CDF[NormalDistribution[
    Mean[Transpose[TabRetornos][[activo]]], StandardDeviation[Transpose[TabRetornos][[activo]]]], x];
 TabComNOR = Table[CompNOR[Uord[[k]]], {k, 1, emme}]; DMais = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - (i / emme)], {i, 1, emme}];
 DMenos = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - ((i - 1) / emme)], {i, 1, emme}]; EstD = Max[Union[DMais, DMenos]];
 ValorCritico1 = 1.3581 / emme^0.5; ValorCritico2 = 1.6276 / emme^0.5;
 UU = Append[UU, {If[EstD > ValorCritico1, 1, 2], If[EstD > ValorCritico2, 1, 2]}];
];
UU
```

```
{{2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}}
```

Conclusão : Não rejeitamos a hipótese de que os retornos aditivos perturbados têm a mesma distribuição do retornos dos dados (com parâmetros estimados para os dados) para cada um dos 10 activos.

▪ Teste de Kolmogorov - Smirnov entre os dados e os dados perturbados

▪ A função K de Kolmogorov

A função K[t,u] de Kolmogorov (Ivchenko p.22) é calculada com um erro "u" no ponto "t"

```
aa3[t_, j_Integer] := ((-1)^j) * E^(-2 * (j^2) * t^2);
Erro[u_, t_] := Ceiling[(Log[u] / (-2 * t^2))^0.5];
K[t_, u_] := Sum[aa3[t, j], {j, -Erro[u, t], Erro[u, t]}]
```

▪ Preparação dos dados para o cálculo da estatística de K-S

```
activo = 1;

mun = 1; t0 = Transpose[TabRetornosPER][[activo]]; u0 = Transpose[TabRetornos][[activo]];
ene = {ene1, ene2}; ene1 = Length[t0]; ene2 = Length[u0];
t = Sort[t0]; t2 = Table[{1, i, t[[i]]}, {i, 1, ene[[1]]}];
u = Sort[u0];
u2 = Table[{2, i, u[[i]]}, {i, 1, ene[[2]]}];
j = Join[t2, u2];
k = j[[Ordering[j[[All, {3}]]]]];
k = Transpose[Part[Transpose[k], {1, 2}]];
k = Join[{{1, 0}}, Join[{{2, 0}}, k]];
```

▪ O cálculo da estatística de K-S

```
mm = 0;
For[i = ene[[1]] + ene[[2]] + 2, i ≥ 3, i--,
 For[j = i - 1, j ≥ 1, j--,
  rdel = If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] == 0, 0,
    Abs[k[[i]][[2]] / ene[[k[[i]][[1]]]] - k[[j]][[2]] / ene[[k[[j]][[1]]]]]];
  If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] > 0, j = 0,];
  mm = Max[mm, rdel];
 ]
]
```

```
{N[mm], mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2))^0.5}
```

```
{0.138889, 0.589256}
```

```
pVal = 1 - K[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2))^0.5, 10^(-10)]
```

```
0.878182
```

```
U = {}; U = Append[U, {mun, pVal}]
```

```
{{1, 0.878182}}
```

```
mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2))^0.5
```

```
0.589256
```

```
Length[t0]
```

```
36
```

Resultados dos testes

```
If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.6276, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.01"],
 Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01"]]
```

```
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
```

```
If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.3581, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.05"],
 Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05"]]
```

```
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
```

Conclusão : Não rejeitamos a hipótese de que os retornos aditivos perturbados têm a mesma distribuição do retornos dos dados (comparando directamente os dados e os dados perturbados) para cada um dos 10 activos.

```
VV = {}; For[activo = 1, activo ≤ 10, activo++, mun = 1;
 t0 = Transpose[TabRetornosPER][[activo]]; u0 = Transpose[TabRetornos][[activo]];
 ene = {ene1, ene2}; ene1 = Length[t0]; ene2 = Length[u0];
 t = Sort[t0]; t2 = Table[{1, i, t[[i]]}, {i, 1, ene[[1]]}];
 u = Sort[u0];
 u2 = Table[{2, i, u[[i]]}, {i, 1, ene[[2]]}];
 j = Join[t2, u2];
 k = j[[Ordering[j[[All, {3}]]]]];
 k = Transpose[Part[Transpose[k], {1, 2}]];
 k = Join[{{1, 0}}, Join[{{2, 0}}, k]];
 mm = 0;
 For[i = ene[[1]] + ene[[2]] + 2, i ≥ 3, i--,
  For[j = i - 1, j ≥ 1, j--,
   rdel = If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] == 0,
     0, Abs[k[[i]][[2]] / ene[[k[[i]][[1]]]] - k[[j]][[2]] / ene[[k[[j]][[1]]]]]];
   If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] > 0, j = 0,];
   mm = Max[mm, rdel];
  ]
 ]; VV = Append[VV,
   {If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.6276, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.01"],
     Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01"]],
    If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.3581, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.05"],
     Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05"]]}]
]; VV
```

```
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
```

```
{{Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null},
 {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}}
```

Cálculo do V@R Perturbado com a alteração da matriz de Var-Covar apenas no sinal dos valores próprios

Simulação das Perturbações

```
Needs["MultivariateStatistics`"]
```

```
mediaPER = Table[0, {i, 1, 10}];
```

```
a = Length[Dados[1]]
```

```
37
```

```
PER = RandomReal[MultinormalDistribution[mediaPER, RECaaVarCovPer], a - 1]; MatrixForm[PER]
```

-0.0169945	-0.0244961	-0.0020256	0.00702863	-0.0268884	-0.0220014	-0.00624564	0.0087085	-0.024
-0.082506	-0.0592859	-0.11941	-0.0640339	-0.143207	-0.0747728	-0.0918913	-0.0392856	-0.10
-0.0136537	-0.0097851	-0.00982899	-0.00907531	-0.0252111	-0.0169993	-0.033657	-0.0383035	-0.014
-0.0320706	-0.00538313	-0.0312302	-0.0321053	-0.056444	-0.0574528	-0.0236307	-0.0366053	-0.044
0.0104342	0.00242658	0.00170326	0.0288257	0.0180019	0.0173836	-0.00126688	-0.00649347	0.017
0.0464039	0.0105023	0.0548905	0.0282603	0.0674348	0.0183331	0.0510943	0.0282107	0.031
0.0217516	-0.0143872	0.00714295	-0.00118316	0.0318859	0.0278118	0.00125226	0.00676982	0.035
0.130252	0.0386108	0.11979	0.0405826	0.167024	0.0577494	0.0928403	0.0720878	0.105
-0.0925528	-0.0460559	-0.117769	-0.0429152	-0.186851	-0.0520084	-0.120374	-0.0784971	-0.11
-0.033637	-0.028006	-0.0453516	0.0191483	-0.0667304	-0.0266409	-0.020057	-0.00654959	-0.044
0.00814734	0.0126583	0.0289465	0.00930177	0.0685582	0.014081	0.0403048	0.0413048	0.050
0.0743744	0.0112606	0.057575	0.0252055	0.0410774	0.045332	0.0496604	0.0141813	0.016
0.0962772	0.0529651	0.10764	0.0702673	0.16674	0.0190571	0.0942929	0.0758648	0.092
0.110009	0.0704186	0.109619	0.0635736	0.157504	0.0861586	0.0828951	0.056678	0.107
0.142915	0.087513	0.159099	0.0870101	0.27806	0.0912591	0.140398	0.120176	0.192
0.0085562	-0.00616918	-0.0205178	0.0125923	0.0128279	-0.0220858	0.00392734	0.0109122	0.019
-0.0032785	-0.0337452	-0.0234938	-0.0296509	-0.00486078	-0.00923694	-0.0647946	0.00497635	-0.013
-0.0445826	-0.056134	-0.0847932	-0.0439459	-0.0899536	-0.032931	-0.0548144	-0.0450407	-0.050
0.0822107	0.0703537	0.0991087	0.0317731	0.146108	0.0483661	0.0681773	0.0390218	0.092
-0.0458888	-0.0562936	-0.0221143	-0.00274442	-0.0527837	-0.0463203	-0.040855	-0.0347109	-0.054
-0.0137287	0.00586922	-0.0254533	-0.0193158	-0.0196701	0.000893144	-0.0174515	-0.0038837	-0.006
-0.00402245	-0.0194689	0.0118935	-0.00553318	0.00879026	-0.000590506	-0.00688443	-0.00567689	-0.006
-0.0243038	-0.0112912	-0.0492925	-0.0174094	-0.0999391	-0.0218243	-0.0137846	-0.0292119	-0.056
0.0700232	0.0510927	0.0980388	0.0295196	0.151872	0.0527849	0.0896729	0.0635901	0.098
0.0149308	0.00144688	0.0204063	0.0382897	0.0256496	0.0195659	-0.0032397	-0.0152908	0.015
-0.00139383	0.0259411	-0.0584364	-0.023822	-0.0354055	-0.0156358	-0.01519	-0.0264611	-0.004
0.0096248	-0.0045582	0.0249944	-0.0180345	0.0157919	0.00285719	0.00615607	0.00350199	0.0056
-0.00902582	-0.0150138	-0.0161964	0.0183171	-0.0502586	-0.0147668	-0.0295518	-0.0538574	-0.027
0.0884064	0.0651608	0.0936755	0.0463156	0.133013	0.0688363	0.07573	0.01807	0.088
-0.115859	-0.0360186	-0.140686	-0.0759897	-0.200069	-0.108633	-0.11617	-0.0734842	-0.13
-0.12818	-0.0673269	-0.134866	-0.0695305	-0.180228	-0.0902036	-0.101172	-0.0690453	-0.10
0.0239209	0.027927	0.0224159	0.0236299	0.0225439	-0.00747713	0.0239632	-0.00834549	0.018
0.0453755	0.0469929	0.0232593	0.0216417	0.0654389	0.0178175	0.040952	0.0480302	0.040
-0.0270117	-0.0355683	0.00497771	-0.0147337	-0.00884863	0.0129844	-0.0181424	0.00278433	-0.011
0.0413459	-0.0000319354	0.0434016	0.0610379	0.0639148	0.0282545	0.0396966	0.00776632	0.041
0.0682235	0.0651804	0.0891921	0.0177921	0.174911	0.0823435	0.132861	0.105876	0.123

```
TabRetornosPER = Table[PER[[i]][[j]] + TabRetornos[[i]][[j]], {i, 1, a - 1}, {j, 1, 10}];
MatrixForm[TabRetornosPER]
```

0.0811487	0.0325562	-0.0343216	-0.0260683	-0.0462589	-0.0159347	-0.00200236	0.0291167	-0.0205442
-0.174293	-0.0900206	-0.0751134	-0.044474	-0.254318	-0.0687426	-0.176398	-0.0126189	-0.136776
-0.10142	-0.0577356	-0.0871096	-0.0426484	-0.205767	-0.0749413	-0.158272	-0.119472	-0.168649
-0.183674	-0.0768697	-0.0299707	-0.0147356	-0.364919	-0.081843	-0.0833847	-0.121411	-0.189165
0.1582	-0.0176959	0.0532756	0.111752	0.223884	0.082601	0.0641537	0.00895054	0.149314
-0.0583865	-0.0903906	0.00465125	0.0665486	-0.0260611	0.0744556	-0.0401338	-0.0516372	0.0235524
-0.00165972	-0.143484	-0.0482727	-0.0315519	-0.0308943	-0.00117375	-0.0103308	-0.0717426	-0.105455
-0.153995	-0.0674326	-0.0955433	-0.00639723	-0.163119	0.0448141	-0.0927065	-0.0624414	-0.197983
-0.178677	-0.0167191	-0.105875	-0.132117	-0.101137	-0.04596	-0.0268492	0.00958578	-0.0815673
0.044897	-0.0242885	-0.120918	0.00883898	-0.0733094	-0.119827	0.0347675	0.0553552	-0.13769
-0.118066	0.123769	0.138847	0.0665934	0.0950483	0.0229208	0.231573	0.130991	0.0874226
-0.02007	-0.0109616	0.00602015	0.0227424	0.099142	0.0486179	0.00254001	-0.0557775	0.0206996
-0.0570971	-0.0470349	-0.0373127	-0.10998	-0.284479	-0.179633	-0.156623	-0.0259051	0.038602
-0.063904	0.014863	0.0833833	0.123815	0.31306	-0.025558	0.00710048	-0.036918	0.0129695
0.178003	0.114251	0.0730891	0.0728056	0.268445	0.0636517	0.103361	0.223437	0.207648
-0.0253421	-0.107732	-0.0397922	-0.140145	-0.0162983	0.0820151	-0.158161	-0.0826838	-0.134128
-0.205033	-0.038093	-0.156442	-0.114685	-0.274861	-0.149237	-0.232008	-0.0819802	-0.267598
-0.165462	-0.0998021	-0.314126	-0.0550983	-0.22694	-0.0528645	-0.129618	-0.181945	-0.204947
0.0947107	0.0444785	0.256548	0.0430513	0.0984893	-0.0448543	0.0681773	0.107987	0.0543967
-0.0582345	-0.0625436	-0.244835	0.0307128	-0.136117	-0.0799652	-0.00255718	-0.0798721	0.0651622
-0.213729	-0.0507346	-0.133146	-0.116438	-0.256034	-0.0977529	-0.107615	-0.0173972	-0.0156983
-0.0352725	0.0388645	-0.356641	0.0343075	0.127838	0.115289	0.128251	-0.0193755	0.336005
0.120857	-0.0112912	0.220332	0.0400618	0.538359	-0.0256705	0.291771	0.0957881	0.205043
0.140446	0.0369194	0.173308	0.0585052	0.424599	0.0585764	0.0744753	0.100627	0.103332
-0.0377008	-0.073633	-0.0195937	0.0206841	-0.00496267	0.00229147	-0.00632612	0.0263759	-0.0531534
0.0402728	0.136477	0.0821886	-0.0274062	-0.0459319	0.11913	-0.0894934	-0.0436039	0.0412171
0.222958	0.0763127	0.0729396	0.0682964	0.132813	0.0665405	0.146624	0.108153	0.000241752
0.100864	0.0972164	0.0404485	0.054741	-0.00263959	0.0742299	0.0848177	0.0514057	0.0876095
0.0488024	0.0379939	0.128727	0.0079769	0.10574	0.0658645	0.138888	-0.0676443	0.0441715
-0.208642	-0.0572952	-0.2124	-0.0627007	-0.228107	-0.114595	-0.170625	-0.0891092	-0.217397
-0.162271	-0.012979	-0.154179	-0.0498584	-0.170612	-0.0137419	-0.0697583	-0.0214263	-0.0185099
-0.0466673	0.00859713	-0.0563588	-0.0535405	-0.082218	-0.0506526	-0.138473	-0.043699	-0.0382501
-0.0179156	-0.0239664	-0.107382	-0.0410761	-0.0409441	-0.124832	-0.00450258	0.011381	-0.0853875
0.0810964	0.074757	0.0978739	0.0782031	0.253056	0.0791983	0.010429	0.149523	-0.00530155
-0.104996	-0.0318791	-0.0565984	-0.0239962	-0.0870286	-0.126204	-0.123884	-0.0348877	-0.140199
0.0539377	0.0704435	0.0614143	0.025227	0.241578	0.0879932	0.125481	0.110827	0.131208

Cálculo dos V@Rs perturbados individuais e os da carteira

```
RetornosMPER[n_Integer] := Transpose[TabRetornosPER][[n]]

VarMedioActivoPER[n_Integer, q_] :=
 (Quantile[NormalDistribution[Mean[RetornosMPER[n]], StandardDeviation[RetornosMPER[n]]], q] -
    Mean[RetornosMPER[n]]) * MontanteCarteira * PesosCarteira[[n]]

VectorVARSMedioPER = Table[VarMedioActivoPER[i, 0.05], {i, 1, 10}]
```

```
{-0.0318634, -0.0086518, -0.0249565, -0.0056083,
 -0.0260704, -0.0122701, -0.0251029, -0.0202031, -0.0166392, -0.0175773}
```

```
Sum[VectorVARSMedioPER[[i]], {i, 1, 10}]
```

```
-0.188943
```

```
VaRMedioCarteiraPER = - (Dot[Dot[VectorVARSMedioPER, Correlation[TabRetornosPER]], VectorVARSMedioPER]) ^0.5
```

```
-0.150529
```

```
VaRMedioCarteiraPER = - (Dot[Dot[VectorVARSMedio, Correlation[TabRetornosPER]], VectorVARSMedio]) ^0.5
```

```
-0.138622
```

```
MatrixForm[Correlation[TabRetornosPER]]
```

1.	0.554303	0.621826	0.619775	0.750747	0.543739	0.664592	0.654136	0.617989	0.395403
0.554303	1.	0.506898	0.479895	0.527978	0.474216	0.577874	0.688877	0.598485	0.431842
0.621826	0.506898	1.	0.503109	0.651489	0.365691	0.537997	0.608097	0.373782	0.373647
0.619775	0.479895	0.503109	1.	0.707298	0.524962	0.695847	0.512143	0.581329	0.679555
0.750747	0.527978	0.651489	0.707298	1.	0.587654	0.78935	0.663062	0.708392	0.555212
0.543739	0.474216	0.365691	0.524962	0.587654	1.	0.50459	0.328454	0.560986	0.49873
0.664592	0.577874	0.537997	0.695847	0.78935	0.50459	1.	0.674641	0.752655	0.564118
0.654136	0.688877	0.608097	0.512143	0.663062	0.328454	0.674641	1.	0.583369	0.346179
0.617989	0.598485	0.373782	0.581329	0.708392	0.560986	0.752655	0.583369	1.	0.510543
0.395403	0.431842	0.373647	0.679555	0.555212	0.49873	0.564118	0.346179	0.510543	1.

```
MatrixForm[limitesCoorPER]
```

1	0.661782	0.636159	0.638002	0.775768	0.621255	0.732988	0.770049	0.684776	0.482685
0.661782	1	0.51053	0.622157	0.599894	0.621689	0.689686	0.779784	0.671102	0.560408
0.636159	0.51053	1	0.531521	0.674854	0.455501	0.586753	0.688328	0.428803	0.430024
0.638002	0.622157	0.531521	1	0.725713	0.625109	0.743676	0.616244	0.628549	0.718235
0.775768	0.599894	0.674854	0.725713	1	0.608296	0.823191	0.729277	0.742702	0.604395
0.621255	0.621689	0.455501	0.625109	0.608296	1	0.588739	0.494429	0.640945	0.61462
0.732988	0.689686	0.586753	0.743676	0.823191	0.588739	1	0.779347	0.796738	0.632142
0.770049	0.779784	0.688328	0.616244	0.729277	0.494429	0.779347	1	0.67811	0.466652
0.684776	0.671102	0.428803	0.628549	0.742702	0.640945	0.796738	0.67811	1	0.567489
0.482685	0.560408	0.430024	0.718235	0.604395	0.61462	0.632142	0.466652	0.567489	1

```
MatrixForm[Chop[Correlation[TabRetornosPER] - limitesCoorPER]]
```

0	-0.107479	-0.0143329	-0.0182271	-0.025021	-0.0775162	-0.0683963	-0.115913	-0.0667867	-0.087
-0.107479	0	-0.0036319	-0.142261	-0.0719154	-0.147473	-0.111811	-0.0909064	-0.072617	-0.128
-0.0143329	-0.0036319	0	-0.0284119	-0.0233645	-0.0898098	-0.0487567	-0.080231	-0.0550214	-0.056
-0.0182271	-0.142261	-0.0284119	0	-0.0184145	-0.100148	-0.0478293	-0.104102	-0.0472206	-0.038
-0.025021	-0.0719154	-0.0233645	-0.0184145	0	-0.0206419	-0.0338415	-0.0662152	-0.0343104	-0.049
-0.0775162	-0.147473	-0.0898098	-0.100148	-0.0206419	0	-0.084149	-0.165975	-0.0799598	-0.11
-0.0683963	-0.111811	-0.0487567	-0.0478293	-0.0338415	-0.084149	0	-0.104705	-0.0440836	-0.068
-0.115913	-0.0909064	-0.080231	-0.104102	-0.0662152	-0.165975	-0.104705	0	-0.094741	-0.120
-0.0667867	-0.072617	-0.0550214	-0.0472206	-0.0343104	-0.0799598	-0.0440836	-0.094741	0	-0.056
-0.0872822	-0.128566	-0.0563766	-0.0386802	-0.0491831	-0.11589	-0.068024	-0.120473	-0.0569463	0

```
Norm[VectorVARSMedio - VectorVARSMedioPER]
```

```
0.00546749
```

```
MatrixForm[Correlation[TabRetornos]]
```

1.	0.536943	0.501863	0.504386	0.693002	0.481457	0.634432	0.685172	0.568424	0.291741
0.536943	1.	0.329862	0.482692	0.452211	0.482051	0.575146	0.6985	0.549704	0.398151
0.501863	0.329862	1.	0.358602	0.554839	0.254522	0.434221	0.573287	0.21797	0.219641
0.504386	0.482692	0.358602	1.	0.624471	0.486734	0.649065	0.474597	0.491444	0.614233
0.693002	0.452211	0.554839	0.624471	1.	0.463714	0.75793	0.629351	0.647732	0.458374
0.481457	0.482051	0.254522	0.486734	0.463714	1.	0.43694	0.307819	0.508416	0.472373
0.634432	0.575146	0.434221	0.649065	0.75793	0.43694	1.	0.697902	0.721713	0.496363
0.685172	0.6985	0.573287	0.474597	0.629351	0.307819	0.697902	1.	0.559298	0.26979
0.568424	0.549704	0.21797	0.491444	0.647732	0.508416	0.721713	0.559298	1.	0.407846
0.291741	0.398151	0.219641	0.614233	0.458374	0.472373	0.496363	0.26979	0.407846	1.

```
MatrixForm[Chop[Correlation[TabRetornosPER] - Correlation[TabRetornos]]]
```

0	0.0173595	0.119964	0.115389	0.0577448	0.0622815	0.0301597	-0.0310365	0.0495651	0.103
0.0173595	0	0.177035	-0.00279649	0.075767	-0.00783534	0.00272806	-0.00962284	0.0487817	0.0336
0.119964	0.177035	0	0.144507	0.0966496	0.111169	0.103776	0.0348095	0.155812	0.154
0.115389	-0.00279649	0.144507	0	0.0828271	0.0382275	0.0467819	0.0375457	0.0898847	0.0653
0.0577448	0.075767	0.0966496	0.0828271	0	0.123939	0.0314199	0.0337107	0.0606602	0.0968
0.0622815	-0.00783534	0.111169	0.0382275	0.123939	0	0.0676505	0.0206347	0.0525701	0.0263
0.0301597	0.00272806	0.103776	0.0467819	0.0314199	0.0676505	0	-0.0232605	0.0309418	0.0677
-0.0310365	-0.00962284	0.0348095	0.0375457	0.0337107	0.0206347	-0.0232605	0	0.0240709	0.0763
0.0495651	0.0487817	0.155812	0.0898847	0.0606602	0.0525701	0.0309418	0.0240709	0	0.102
0.103663	0.0336908	0.154006	0.0653214	0.0968378	0.0263567	0.0677552	0.0763898	0.102697	0

```
Norm[Correlation[TabRetornosPER] - Correlation[TabRetornos]]
```

```
0.639705
```

Conclusões : na simulação obtem - se um V@R perturbado superior valor maximal do V@R não perturbado (para os V@Rs iniciais, porque, para os V@Rs perturbados o V@R máximo é maior) e a matriz das correlações estimada para os dados perturbados é maior, termo a termo, do que a matriz dos dados iniciais. A matriz de correlação limite é geralmente inferior, termo a termo, à matriz de empírica dos dados perturbados.

- **Para ter uma matriz ou qq outra coisa em Tex**

- **Teste de Kolmogorov entre os dados perturbados e a distribuição dos dados (com parâmetros estimados)**

NB : Tem que se correr esta secção para activos=1...10;

```
activo = 5;

aa2[t_, j_Integer] := ((-1) ^ (j)) * E ^ (-2 * (j ^ 2) * t ^ 2);
Erro[u_, t_] := Ceiling[(Log[u] / (-2 * t ^ 2)) ^ 0.5];
K[t_, u_] := Sum[aa2[t, j], {j, -Erro[u, t], Erro[u, t]}]

Uord = Sort[Transpose[TabRetornosPER][[activo]]];

emme = Length[Uord];

CompNOR[x_] := CDF[NormalDistribution[
   Mean[Transpose[TabRetornos][[activo]]], StandardDeviation[Transpose[TabRetornos][[activo]]]], x]

TabComNOR = Table[CompNOR[Uord[[k]]], {k, 1, emme}];

DMais = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - (i / emme)], {i, 1, emme}];

DMenos = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - ((i - 1) / emme)], {i, 1, emme}];

EstD = Max[Union[DMais, DMenos]]

0.100359

pVal = 1 - K[EstD, 10 ^ (-10)]

1.

K[1.3581, 10 ^ (-10)]

0.95

ValorCritico1 = 1.3581 / emme ^ 0.5

0.22635

If[EstD > ValorCritico1, 1, 2]
(*  1="Conclusão: Rejeitamos a hipótese de que a amostra provem da distribuição
   dos dados ao nível de significância 0.05",
2="Conclusão: Não rejeitamos a hipotese de que a amostra provem da
   distribuição dos dados ao nível de significância 0.05"  *)

2

K[1.627626, 10 ^ (-10)]

0.99

ValorCritico2 = 1.6276 / emme ^ 0.5

0.271267

If[EstD > ValorCritico2, 1, 2]
(*  1="Conclusão: Rejeitamos a hipótese de que a amostra provem da distribuição
   dos dados ao nível de significância 0.01",
2="Conclusão: Não rejeitamos a hipotese de que a amostra provem da
   distribuição dos dados ao nível de significância 0.01"  *)

2
```

```
UU = {};
For[activo = 1, activo ≤ 10, activo++, Uord = Sort[Transpose[TabRetornosPER][[activo]]];
 emme = Length[Uord]; CompNOR[x_] := CDF[NormalDistribution[
    Mean[Transpose[TabRetornos][[activo]]], StandardDeviation[Transpose[TabRetornos][[activo]]]], x];
 TabComNOR = Table[CompNOR[Uord[[k]]], {k, 1, emme}]; DMais = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - (i / emme)], {i, 1, emme}];
 DMenos = Table[Abs[TabComNOR[[i]] - ((i - 1) / emme)], {i, 1, emme}]; EstD = Max[Union[DMais, DMenos]];
 ValorCritico1 = 1.3581 / emme ^ 0.5; ValorCritico2 = 1.6276 / emme ^ 0.5;
 UU = Append[UU, {If[EstD > ValorCritico1, 1, 2], If[EstD > ValorCritico2, 1, 2]}];
];
UU
```

```
{{2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}, {2, 2}}
```

Conclusão : Não rejeitamos a hipótese de que os retornos aditivos perturbados têm a mesma distribuição do retornos dos dados (com parâmetros estimados para os dados) para cada um dos 10 activos.

Teste de Kolmogorov - Smirnov entre os dados e os dados perturbados

A função K de Kolmogorov

A função K[t,u] de Kolmogorov (Ivchenko p.22) é calculada com um erro "u" no ponto "t"

```
aa3[t_, j_Integer] := ((-1) ^ j) * E ^ (-2 * (j ^ 2) * t ^ 2);
Erro[u_, t_] := Ceiling[(Log[u] / (-2 * t ^ 2)) ^ 0.5];
K[t_, u_] := Sum[aa3[t, j], {j, -Erro[u, t], Erro[u, t]}]
```

Preparação dos dados para o cálculo da estatística de K-S

```
activo = 1;

mun = 1; t0 = Transpose[TabRetornosPER][[activo]]; u0 = Transpose[TabRetornos][[activo]];
ene = {ene1, ene2}; ene1 = Length[t0]; ene2 = Length[u0];
t = Sort[t0]; t2 = Table[{1, i, t[[i]]}, {i, 1, ene[[1]]}];
u = Sort[u0];
u2 = Table[{2, i, u[[i]]}, {i, 1, ene[[2]]}];
j = Join[t2, u2];
k = j[[Ordering[j[[All, {3}]]]]];
k = Transpose[Part[Transpose[k], {1, 2}]];
k = Join[{{1, 0}}, Join[{{2, 0}}, k]];
```

O cálculo da estatística de K-S

```
mm = 0;
For[i = ene[[1]] + ene[[2]] + 2, i ≥ 3, i--,
 For[j = i - 1, j ≥ 1, j--,
  rdel = If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] == 0, 0,
    Abs[k[[i]][[2]] / ene[[k[[i]][[1]]]] - k[[j]][[2]] / ene[[k[[j]][[1]]]]]];
  If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] > 0, j = 0,];
  mm = Max[mm, rdel];
 ]
]
```

```
{N[mm], mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^ 0.5}
```

```
{0.138889, 0.589256}
```

```
pVal = 1 - K[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^ 0.5, 10 ^ (-10)]
```

```
0.878182
```

```
U = {}; U = Append[U, {mun, pVal}]
```

```
{{1, 0.878182}}
```

```
mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^ 0.5
```

```
0.589256
```

```
Length[t0]
```

```
36
```

Resultados dos testes

```
If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.6276, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.01"],
 Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01"]]
```

```
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
```

```
If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.3581, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.05"],
 Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05"]]
```

```
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
```

Conclusão : Não rejeitamos a hipótese de que os retornos aditivos perturbados têm a mesma distribuição do retornos dos dados (comparando directamente os dados e os dados perturbados) para cada um dos 10 activos.

```
VV = {}; For[activo = 1, activo ≤ 10, activo++, mun = 1;
 t0 = Transpose[TabRetornosPER][[activo]]; u0 = Transpose[TabRetornos][[activo]];
 ene = {ene1, ene2}; ene1 = Length[t0]; ene2 = Length[u0];
 t = Sort[t0]; t2 = Table[{1, i, t[[i]]}, {i, 1, ene[[1]]}];
 u = Sort[u0];
 u2 = Table[{2, i, u[[i]]}, {i, 1, ene[[2]]}];
 j = Join[t2, u2];
 k = j[[Ordering[j[[All, {3}]]]]];
 k = Transpose[Part[Transpose[k], {1, 2}]];
 k = Join[{{1, 0}}, Join[{{2, 0}}, k]];
 mm = 0;
 For[i = ene[[1]] + ene[[2]] + 2, i ≥ 3, i--,
  For[j = i - 1, j ≥ 1, j--,
   rdel = If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] == 0,
     0, Abs[k[[i]][[2]] / ene[[k[[i]][[1]]]] - k[[j]][[2]] / ene[[k[[j]][[1]]]]]];
   If[Abs[k[[i]][[1]] - k[[j]][[1]]] > 0, j = 0,];
   mm = Max[mm, rdel];
  ]
 ]; VV = Append[VV,
   {If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.6276, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.01"],
     Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01"]],
    If[mm * ((ene1 * ene2) / (ene1 + ene2)) ^0.5 ≥ 1.3581, Print["The hypothesis is rejected for alpha = 0.05"],
     Print["The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05"]]}]
]; VV
```

```
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.01
The hypothesis fails to be rejected for alpha = 0.05
```

```
{{Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null},
 {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}, {Null, Null}}
```